ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
КЫРГЫЗСКО-РОССИЙСКИЙ СЛАВЯНСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени первого Президента Российской Федерации Б.Н. Ельцина

Научно-исследовательский центр
«Математические методы оптимизации (ММО) – Оптимал»

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ, ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Материалы IV Международной конференции, приуроченной к 50-летию научно-педагогической деятельности и 75-летнему юбилею доктора физико-математических наук профессора Акылбека Керимбекова

(г. Бишкек, 23–25 июня 2022 г.)

*Посвящается 30-летию
Кыргызско-Российского Славянского
университета имени Б.Н. Ельцина*

Бишкек 2023

УДК 517
ББК 22.161.6
А 43

Под общей редакцией
д-ра физ.-мат. наук, профессора *А.К. Керимбекова*

Рецензенты:
С.И. Искандаров, д-р физ.-мат. наук профессор Института математики
Национальной академии наук Кыргызской Республики,
Г.В. Лоцев, канд. техн. наук, доцент КРСУ им. Б.Н. Ельцина

Рекомендовано к изданию Научно-техническим советом КРСУ им. Б.Н. Ельцина
и Научно-техническим советом Научно-исследовательского центра
«Математические методы оптимизации (ММО) – Оптимал»

А 43 АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ, ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ И ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ: материалы IV Международной конференции, приуроченной к 50-летию научно-педагогической деятельности и 75-летнему юбилею доктора физико-математических наук профессора Акылбека Керимбекова (г. Бишкек, 23–25 июня 2022 г.) / под общ. ред. д-ра физ.-мат. наук, проф. А.К. Керимбекова. – Бишкек: Изд-во КРСУ, 2023. – 200 с.

ISBN 978-9967-19-956-9

Материалы конференции содержат статьи по актуальным проблемам теории управления, динамических систем, операторных уравнений, по проблемам инновационных и компьютерных технологий обучения математическим предметам в высшей школе. В статьях рассмотрены:
- задачи нелинейной оптимизации технологических процессов, описываемых дифференциальными и интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных с интегральными операторами Фредгольма или Вольтерра;
- задачи об асимптотических поведениях решений сингулярных уравнений;
- смешанные задачи для параболо-гиперболических уравнений третьего порядка
- спектральные свойства линейных и нелинейных операторных уравнений;
- актуальные вопросы математического моделирования и компьютерных методов;
- проблемы преподавания математики в высшей школе.

Сборник предназначен для студентов, магистрантов, аспирантов и научных работников, интересующихся проблемами:
- теории оптимального управления;
- дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений и их приложениями;
- динамических систем;
- компьютерных и инновационных технологий;
- преподавания математики в высшей школе.

УДК 517
ББК 22.161.6

ISBN 978-9967-19-956-9

Международный программный комитет

Сопредседатели программного комитета

В.И. Нифадьев	– д-р, профессор, академик (Кыргызстан)
А.И. Егоров	– д-р, профессор (Россия)
А. Ашыралиев	– д-р, профессор (Турция)

Заместители председателей программного комитета

В.М. Лелевкин	– д-р, профессор (Кыргызстан)
К.Н. Оспанов	– д-р, профессор (Казахстан)
Ч. Ашыралиев	– д-р, профессор (Турция)

Члены программного комитета

Н.Н. Субботина	– д-р, профессор, чл.-корр. (Россия)
М. Ружанский	– д-р, профессор (Бельгия)
Л. Кочинач	– д-р, профессор (Сербия)
А.С. Эрдоган	– д-р, профессор (США)
З. Нашед	– д-р, профессор (США)
В.И. Максимов	– д-р, профессор (Россия)
А.В. Аргучинцев	– д-р, профессор (Россия)
В.А. Срочко	– д-р, профессор (Россия)
Л.Н. Знаменская	– д-р, профессор (Россия)
М.С. Арипов	– д-р, профессор (Узбекистан)
Ж.А. Сартабанов	– д-р, профессор (Казахстан)
М.Б. Муратбеков	– д-р, профессор (Казахстан)
А.К. Керимбеков	– д-р, профессор (Кыргызстан)
А.А. Асанов	– д-р, профессор (Кыргызстан)
А.С. Сатыбаев	– д-р, профессор (Кыргызстан)
А.М. Джураев	– д-р, профессор (Кыргызстан)
А.С. Сопуев	– д-р, профессор (Кыргызстан)
С.И. Искандаров	– д-р, профессор (Кыргызстан)
А.Б. Байзаков	– д-р, профессор (Кыргызстан)
К.Т. Торогельдиева	– д-р, профессор (Кыргызстан)
М. Ашыралиев	– д-р-асс. (Швеция)
К. Нуртазина	– канд. физ.-мат. наук (Казахстан)
Г.В. Лоцев	– канд. техн. наук (Кыргызстан)
Л.Г. Лелевкина	– канд. физ.-мат. наук (Кыргызстан)
Э.Ф. Абдылдаева	– канд. физ.-мат. наук (Кыргызстан)
К. Карабакиров	– канд. физ.-мат. наук (Кыргызстан)
А.К. Баетов	– канд. физ.-мат. наук (Кыргызстан)
Ж.К. Асанова	– канд. физ.-мат. наук (Кыргызстан)
Б.Ы. Аширбаев	– канд. физ.-мат. наук (Кыргызстан)

СОДЕРЖАНИЕ

Секция III. ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ

АННОТАЦИИ ДОКЛАДОВ НЕ ПРЕДСТАВЛЕННЫХ АВТОРАМИ СТАТЕЙ

НАУЧНО-ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ ПРОФЕССОРА АКЫЛБЕКА КЕРИМБЕКОВА

Акылбек Керимбеков родился 10 января 1947 года в Ак-Чийском сельсовете Кировского (ныне Кара-Бууринского) района, Таласской области, Кыргызской Республики в семье животновода. В 1965 году окончил Джоон-Тюбинскую одиннадцатилетнюю школу. В школьные годы был активистом, в 1960–1965 годы возглавлял школьную комсомольскую организацию и трижды был делегатом Таласской региональной комсомольской конференции.

В 1965 году поступил на физико-математический (с 1967 года – механико-математический) факультет Кыргызского государственного университета, который успешно окончил в 1970 году.

Трудовую деятельность начал с 1970 года учителем математики в Джоон-Тюбинской средней школе. В 1971–1972 годы работал инженером научно-исследовательской лаборатории сейсмостойких строительств (НИЛСС) Фрунзенского политехнического института, а с 1972 по 1992 год – преподавателем, старшим преподавателем и доцентом кафедры дифференциальных уравнений Кыргызского государственного университета. Активно занимался общественной работой. Был председателем профсоюзного комитета факультета и членом Президиума профсоюзного комитета университета.

С 1972 по 1976 год А. Керимбеков был аспирантом Института автоматики Академии наук Кыргызской ССР заочной формы обучения. Под научным руководством профессора А.И. Егорова начал заниматься исследованием задач теории оптимального управления системами с распределенными параметрами. Кандидатскую диссертацию на тему «Приближенное решение задач оптимального управления процессами, описываемыми системой телеграфных уравнений» защитил в 1988 году в Диссертационном совете Ленинградского государственного университета по специальности 01.01.09 – математическая кибернетика.

В 1992–1998 годы работал деканом физико-математического факультета Кыргызского государственного педагогического института (с 1996 года – Кыргызский государственный педагогический университет имени И. Арабаева, ныне Кыргызский государственный университет имени И. Арабаева). В период с 1998 по 2006 год занимал должность заведующего кафедрой «Дифференциальные уравнения» Кыргызского государственного университета имени Ж. Баласагына (ныне Кыргызский национальный университет имени Ж. Баласагына). По результатам исследований, в 2003 году защитил докторскую диссертацию на тему «Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами» в Диссертационном совете Института математики Национальной академии наук Кыргызской Республики по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения. В 2007 году диплом доктора наук был нострифицирован Высшей аттестационной комиссией Российской Федерации.

С 2006 года работает в Кыргызско- Российском Славянском университете профессором кафедры «Прикладная математика и информатика» естественно-технического факультета. С 2006 по 2019 год по совместительству работал Главным научным сотрудником Института математики Национальной академии наук Кыргызской Республики.

Научная работа

Научными исследованиями задач теории оптимального управления системами с распределенными параметрами А. Керимбеков занимается более 40 лет. Объектом исследования он выбрал технологические процессы, описываемые дифференциальными уравнениями в частных производных и интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных с интегральным оператором Фредгольма или Вольтерра. Им исследованы вопросы разрешимости задач нелинейной оптимизации, то есть задач, где функции внешних возмущающих воздействий нелинейны относительно параметров управления. Поскольку реально протекающие процессы обычно нелинейны, то найденные математическими методами решения задач нелинейной оптимизации более или менее адекватно описывают состояние управляемого процесса, поэтому результаты исследований имеют как теоретический, так и практический интерес. Разработаны методы решения задач нелинейной оптимизации при граничном, распределенном и точечном управлениях, а также задачи слежения, которые часто встречаются в приложениях.

Исследования задач нелинейной оптимизации при программном управлении процессом проводились с использованием понятия обобщенного решения, принципа максимума для систем с распределенными параметрами и установлено, что искомое оптимальное управление определяется как решение нелинейного интегрального уравнения, которое содержит искомую функцию как под интегралом, так и вне интеграла. Для таких нестандартных нелинейных интегральных уравнений разработана методика построения решения, которая позволила разработать алгоритм построения полного решения задачи нелинейной оптимизации и его приближений при программном управлении процессом. Отмечены влияние интегрального оператора на разрешимость задачи нелинейной оптимизации. На примере исследования вопросов разрешимости отдельных задач нелинейной оптимизации установлено, что «нестандартное уравнение» обладает свойством универсальности, то есть оно имеет место не зависимо от природы управляемого процесса. Таким образом, получены новые результаты в теории оптимального управления системами с распределенными параметрами. Основное содержание метода докладывалось в 2014 году в Сеуле (Южная Корея) на Всемирном Конгрессе математиков.

Исследование задач нелинейной оптимизации при синтезе оптимального управления проводилось с использованием понятий обобщенного решения и дифференциала Фреше по схеме Беллмана – Егорова. Установлено, что синтез оптимального управления осуществляется по формуле, где искомое оптимальное управление определяется как нелинейная функция от градиента функционала Беллмана. Для функционала Беллмана в случае, когда управляемый процесс описывается интегро-дифференциальным уравнением, получено нелинейное интегро-дифференциальное уравнение, которое нелинейно содержит градиент Функционала Беллмана. Такое уравнение нестандартного вида получено впервые, и возникла необходимость разработать методы его решения. Им найдена структура его решения, согласно которой это уравнение распадается на два уравнения, одно из которых является чисто дифференциальным уравнением и решается независимо от второго. Такой подход позволяет разработать алгоритм построения искомого оптимального управления в зависимости от состояния управляемого процесса, то есть решить задачу синтеза. Теоретические результаты были проверены на примере решения задачи с точечными управлениями. Основные результаты докладывались в 2018 году в Рио-де-Жанейро (Бразилия) на очередном Всемирном Конгрессе математиков.

Исследования задач нелинейной спектральной теории проводились с применением теоремы Лагранжа «О конечных приращениях». Им разработана методика, которая позволяет находить определенный класс решений нелинейных алгебраических, интегральных и дифференциальных уравнений с параметрами. Эти результаты являются новыми и могут быть полезными при решении задач нелинейной оптимизации и теории нелинейных спектральных задач. Основные результаты докладывались на Международной конференции ISAAC, которая проходила в городе Вёкше (Швеция) в 2017 году.

Разработанные новые методы являются конструктивными и могут быть полезными при разработке новых методов исследований нелинейных задач оптимального управления, описываемых функциональными уравнениями более сложной природы. Полученные результаты легли в основу **трех новых научных направлений**:

1. Методы исследования задач нелинейной оптимизации при оптимальном программном управлении.

2. Методы исследования задач нелинейной оптимизации при синтезе оптимального управления.

3. Методы исследования нелинейных операторных уравнений с параметром.

В настоящее время учениками А. Керимбекова ведутся научные исследования по каждому из указанных направлений. По результатам исследований профессора А. Керимбекова опубликованы 6 монографий, 169 научных статей, из которых 47 статей опубликованы в зарубежных изданиях, большая часть которых входят в базу РИНЦ, Scopus, Web of Science, а также 75 тезисов научных докладов.

Монографии:

- Математические методы оптимального управления электромагнитными колебаниями. – Бишкек: Изд-во КГПУ им. И. Арабаева, 1997. – 112 с.
- Нелинейное оптимальное управление колебаниями в линиях передач. – Б.: Изд-во КРСУ, 2009. –132 с.
- Приближенное решение задачи нелинейной оптимизации тепловых процессов. – Saarbrucken: Изд-во LAP LAMBERT Academic Publishng, 2011. – 132 с.
- Исследование уравнения Хилла методом поляризации. – Б.: Maxprint, 2013. – 126 с.
- Нелинейное подвижное точечное управление процессом теплопередачи. – Б.: Maxprint, 2013. –116 с.
- Нелинейное оптимальное граничное управление тепловыми процессами. – Б.: Изд-во КРСУ, 2020. – 194 с.

Избранные научные статьи последних лет:

1. ***Kerimbekov A., Abdyldaeva E.*** Optimal distributed control for the processes of oscillation described by Fredholm integro-differential equations // Eurasian mathematical journal, 2015, Vol. 6, № 2. – P. 28–40.

2. ***Керимбеков А., Наметкулова Р., Кадиримбетова А.*** Условия оптимальности в задаче управления тепловыми процессами с интегро-дифференциальным уравнением // Известия ИГУ – 2016. – Т. 16, сер. «Математика». – С. 24–27.

3. ***Керимбеков А., Наметкулова Р., Кадиримбетова А.*** Приближенное решение задачи распределенного и граничного управления тепловым процессом // Известия ИГУ. – 2016. – Т. 16, сер. «Математика». – С. 71–88.

4. ***Керимбеков А., Абдылдаева Э.*** О равных отношениях в задаче граничного векторного управления упругими колебаниями, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями // Журнал «Труды института математики и механики УрО РАН». – 2016. – Т. 22. – № 2. – С. 163–176.

5. ***A. Kerimbekov, E. Abdyldaeva, R. Nametkulova, A. Kadirimbetova.*** On the solvability of a nonlinear optimization problem for thermal processes described by Fredholm integro-differential equations with external and boundary controls // Applied Mathematics & Information Sciences, An International Journal – 2016, Vol. 10, No. I, P. 215–223.

6. ***Kerimbekov A., Abdyldaeva E.*** On the Solvability of a Nonlinear Tracking Problem Under Boundary Control for the Elastic Oscillations Described by Fredholm Integro-Differential Equations // System Modellıng and Optımızatıon Dergisi. 27th IFIP TC 7 Conference, CSMO 2015. Sophia Antipolis, France, June 29-July 3, 2015. Revised Selected Papers. Sprınger – 2017, P. 312–322.

7. ***Kerimbekov A., Abdyldaeva E., Duyshenalieva U.*** Generalized solution of a boundary value problem under point exposure of external forces // International Journal of Pure and Applied Mathematics Dergisi. 113(4). 2017. 609–623.

8. ***Kerimbekov A., Abdyldaeva E., Duishenalieva U., Seidakmat kyzy E.*** On solvability of optimization problem for elastic oscillations with multipoint sources of control // International Conference «Functional analysis in interdisciplinary applications» (FAIA2017), AIP Conference Proceedings 1880, edited by Tynysbek Kal'menov and Makhmud Sadybekov (American Institute of Physics, Melville, NY, 2017), 060009 (2017).

9. ***Kerimbekov A., Abdyldaeva E.*** The Optimal Vector Control for the Elastic Oscillations Described by Fredholm Integral-Differential Equations // Analysis and Partial Differential Equations: Perspectives from Developing Countries. Imperial College London, UK, 2016. – Pp. 14–30.

10. ***Kerimbekov A.*** On a Class of Solutions of the Nonlinear Integral Fredholm Equation // Trends in Mathematics Research Perspectives (Analysis, Probability, Applications, and Computation. Proceedings of the 11th ISAAC Congress, Vaxjo (Sweden) 2017). Switzerland, Birkhauser. – 2019. P. 191–197.

11. ***Kerimbekov A., Seidakmat kyzy E***. On Solvability of Tracking Problem Under Nonlinear Boundary Control // Trends in Mathematics Research Perspectives (Analysis, Probability, Applications, and Computation. Proceeding 97s of the 11th ISAAC Congress, Vaxjo (Sweden) 2017). Switzerland, Birkhauser. – 2019. P. 207–218.

12. ***Керимбеков А.*** Синтез распределенного оптимального управления в задаче слежения при оптимизации тепловых процессов, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. Т. 183 (2020). DOI:10/36535/0233-6723-2020-283-85-97. С. 85–97.

13. ***Kerimbekov A., Abdyldaeva E., Asanova Zh., Uraliev A.*** On the Solvability of Nonlinear Integral Equations // AIP Conference Proceedings 2325, 020033 (2021) – pp. 020024-1-020024-4.

14. ***Kerimbekov A., Doulbekova S.*** On solvability of the nonlinear optimization problem with the limitations on the control // AIP Conference Proceedinds 2325, 020043 (2021) – pp.020043-1-020043-4.

15. ***Kerimbekov A., Baetov A., Krasnichenko L.*** On the solvability of a semilinear hyperbolic equation with a parameter // Journal of Physics: Conference Series 1847 (2021) 012018 IOP Publishing DOI:10.1088/1742-6596/1847/1/012018.

16. ***Kerimbekov A., Ermekbaeva E., Seidakmat kyzy E.*** On the solvability of the tracking problem in the optimization of the thermal process by moving point controls // Вестник Карагандинского университета // Серия Мат № 2 (101)/2021. С. 124–131.

17. ***Керимбеков А.*** О разрешимости задачи синтеза распределенного и граничного управлений при оптимизации колебательных процессов // Труды института математики и механики. Уральское Отделение Российской академии наук. – 2021. – С. 128–140.

Учебники и учебно-методические пособия:

- Ченем түшүнүгү жана анын колдонулушу (Бишкек, 1991).
- Алгебра жана математикалык анализ (Бишкек, 1995) (Котормо: Алгебра и математический анализ под ред. проф. Н.Я. Виленкина для учеников 11 класса с углубленным обучением математики).
- Методы оптимизации (Бишкек, 2016).
- Дифференциалдык теңдемелер (учебник с грифом Министерства образования и науки Кыргызской Республики). – Бишкек: Maxprint, 2017. – 320 б. (2-е издание. – Бишкек, 2019. – 336 б.).
- Энциклопедическое издание «Кара-Бууралыктар баяны». – Бишкек: Учкун, 2008. – 336 б.
- Научно-популярное издание «Кыргыз тарыхынан учкай баяндама». – Бишкек: Maxprint, 2017. – 238 б.

Подготовка научных кадров

Под научным руководством Акылбека Керимбекова защищены 1 докторская, 9 кандидатских (из них 3 утверждены Высшей аттестационной комиссией Российской Федерации), 5 PhD (соискатели из Казахстана) и 17 магистерских диссертаций.

Участие в научных конференциях:

Профессор А.К. Керимбеков выступал с научными докладами на Международных конгрессах и конференциях:

- Всемирные Конгрессы (инженеров – 2011 г., Лондон; математиков – 2014 г., Сеул, Южная Корея; 2018 г. – Рио-де-Жанейро, Бразилия);
- Всемирные Конгрессы математиков Тюркского мира (1999 г. – Элазыг, Турция; 2007 г. – Сакария, Турция; 2009 г. – Алматы, Казахстан; 2014 г. – Иссык-Куль «Аврора», Кыргызстан; 2017 г. – Астана, Казахстан);
- Всемирные Конгрессы ISAAC (2013 г. – Краков, Польша; 2017 г. – Векше, Швеция; 2021 г. – Брюссель, Бельгия);
- Международные конференции, которые проходили в разное время в городах Алматы, Астане, Ташкенте, Стамбуле, на острове Кипр, Улан- Баторе, Екатеринбурге, Иркутске и др.

Научно-общественная работа

- 2004 –2015 гг. – член, заместитель председателя и председатель (2013–2015 гг.) экспертного Совета Национальной аттестационной комиссии по присуждению кандидатских и докторских диссертаций по физико-математическим наукам;
- 2008–2013 гг. – председатель Диссертационного Совета по специальности 01.01.02 – дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление, организованного А. Керимбековым при Высшей Аттестационной Комиссии Российской Федерации на базе Кыргызско-Российского Славянского университета;
- с 2010 г. – член Международного математического общества (ISAAC – International Society for Analysis, its Applications and Computation);
- с 2013 г. – председатель Экспертного совета по научным проектам Министерства образования и науки Кыргызской Республики;
- 2015 г. (2.12.2015) – член Совета по науке, инновациям и новых технологиям при Премьер-министре Кыргызской Республики;
- 2016 г. – член межведомственной рабочей группы по разработке приоритетных направлений по развитию науки в Кыргызской Республике;

- с 2017 г. – член Правления Всемирного математического общества тюрко-язычных стран;
- с 2017 г. – член Редакционной коллегии научного журнала;
- «Proceedings of Institute of Applied Mathematics» Института Прикладной математики Бакинского госуниверситета;
- с 2019 г. член, председатель Экспертного совета по научным проектам Министерства образования и науки Кыргызской Республики;
- С 2021 г. – член диссертационного совета Д 05.21.631 при Институте машиноведения и автоматики Национальной академии наук Кыргызской Республики и Кыргызско-Российского Славянского университета.

Научно-организационная работа

Помимо научно-исследовательской работы профессор А. Керимбеков занимается популяризацией научных достижений по математике и теории оптимального управления среди студентов (бакалавры, магистры), аспирантов и молодых преподавателей.

Им организованы:

- научный семинар «Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами», который регулярно функционирует с 2010 г.;
- научно-исследовательский центр при Кыргызско-Российском Славянском университете «Математические методы оптимизации (ММО) – OPTIMAL» и учебная аудитория им. профессора Я.В. Быкова (чл.-корр. Академии наук Кыргызской ССР), где регулярно проводятся мероприятия по популяризации научного наследия профессора Я.В. Быкова, отечественных и зарубежных математиков;
- 2008 г. 1-я Международная научная конференция «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений», посвященная 15-летию образования Кыргызско-Российского Славянского университета. Под общей редакцией профессора А. Керимбекова выпущен однотомный научный сборник;
- 2013 г. – 2-я Международная конференция «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений», посвященная 20-летию образования Кыргызско-Российского Славянского университета и 100-летию профессора Якова Васильевича Быкова. Под общей редакцией А. Керимбекова выпущен двухтомный научный сборник;
- 2017 г. – 3-я Международная конференция «Актуальные проблемы теории управления, топологии и операторных уравнений», посвященная 25-летию образования Кыргызско-Российского Славянского университета и 70-летию профессора А. Керимбекова. Материалы конференции опубликованы в 2-х номерах журнала «Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана.

В настоящее время А. Керимбеков работает профессором кафедры «Прикладная математика и информатика» естественно-технического факультета и директором Научно-исследовательского центра «Математические методы оптимизации (ММО) – OPTIMAL» при Кыргызско-Российском Славянском университете имени первого Президента Российской Федерации Б.Н. Ельцина. За многолетний и плодотворный научно-педагогический труд профессор А. Керимбеков был удостоен Почетных грамот, Почетных званий, орденов и медалей, благодарностей Министерства образования и науки Кыргызской Республики, отечественных и зарубежных высших учебных заведений и общественных организаций.

Секция I

Оптимальное управление и оптимизация

В.Г. Александров
(Кыргызстан)

ОПЕРАТИВНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ СЕБЕСТОИМОСТИ УДЕЛЬНЫХ ЭНЕРГОЗАТРАТ КАРБЕРНОФАБРИЧНЫХ ПРОЦЕССОВ

Аннотация. Рассматривается решение проблемы оперативной оптимизации параметров буровзрывных (БВР) и фабричных работ на основе текущих телеметрических данных бурения и фракционно-энергетического подобия физических процессов разрушения горных пород бурением, взрыванием и дроблением. В работе показана адекватность фракционно-энергетической модели реальным процессам БВР и оценён экономический эффект цифровой фракционно-энергетической технологии оперативной оптимизации себестоимости удельных энергозатрат карьерно-фабричных процессов.

Ключевые слова: фракционно-энергетическая модель БВР; физическое подобие; буровзрывные работы; крепость породы; размер среднего куска породы; размер среднего осколка; себестоимость удельных энергетических затрат.

Введение. Конечным итогом применения математических методов в производстве является оперативное управление факторами себестоимости его продукции. В горном производстве более текущих затрат составляют карьерно-фабричные затраты, связанные с выполнением буровзрывных (БВР), погрузочно-транспортных работ и работ дробления, измельчения взорванной породы на фабрике, из которых порядка 50 % составляет стоимость энергетических затрат, поэтому их минимизация является актуальной проблемой для всех добывающих горных предприятий. Исходя из того, что годовая стоимость энергетических затрат по карьеру является суммой энерго-затрат карьерно-фабричных работ по всем скважинам, пробуренным за год, то решение глобальной, динамической проблемы оптимизации годовых затрат сводится к оперативному решению локальной задачи минимизации затрат по каждой скважине, что, в итоге, минимизирует годовые суммарные энерго-затраты карьера. На основании теорем физического подобия [1, 2] было доказано фракционно-энергетическое подобие процессов разрушения горной породы бурением и взрыванием. На основании выведенных критериев подобия, а также физических соотношений скорости и удельной энергоёмкости бурения профессора Г.М. Крюкова [3] построена модель расчёта основных параметров БВР. На основании моделей БВР, погрузочно-транспортных работ и фабричных работ крупного и среднего дробления [4, 5] построена модель удельных энергетических затрат, отнесённых на одну скважину.

Постановка задачи оптимизации буровзрывных работ. Локальные удельные энергетические затраты отработки 1-го м^3 горной породы для каждой скважины описываются суммой затрат Z:

$$Z = З_{бр} + З_{вз} + З_{п} + З_{тр} + З_{Др}, \tag{1}$$

где

Удельные затраты на бурение скважины – З бр:

$$З_{бр} = c_{бр} \frac{E_{бр}}{3,6} w_{ск},$$

$c_{бр}$ – удельная стоимость энергозарат;

$w_к = \pi H_{ск} \dfrac{d_{сК}^2}{4}$ – объём выбуренной породы скважины;

$E_{бр}$ – удельная энергоёмкость бурения;
$d_{ск}$ – диаметр скважины.

Удельные затраты на взрывчатое вещество – $З_{вз}$:

$$З_{ВЗ} = с_{ВВ} \frac{d_{бМ} E_{бр}}{d_р e_{ВВ}}, \qquad (2)$$

$с_{ВВ}$ – удельная стоимость ВВ;
$d_{бм}$ – средний размер осколка бурового шлама;
$d_р$ – средний размер куска породы в развале;
$e_{вв}$ – удельная энергия взрыва ВВ.

Удельные затраты на погрузочные работы (экскавация) – $З_п$ [11]:

$$З_п = 21,6 \frac{сэ}{3,6}{}_{э} \left(0,0295 W_{0к1} - 0,0004 W_{0к1}^2\right)\left(d_{ср} + 0,6 d_{ср}^2\right), \qquad (3)$$

где

$с_э^{те}$ – тариф на электроэнергию;

$W_{0к1}$ – номинальный объём ковша экскаватора (с «шапкой»).

Удельные затраты на транспортные работы – $З_{Тр}$:

$$З_{тр} = c_{Дт} \frac{t_{рг} y^2 q}{W_{0к2} k_{Н2}} \left[W_{0к2} k_{Н2} \rho + 2G_c \left(1 + d_{ср}\right)\right], \qquad (4)$$

где

G_c – масса порожнего самосвала;
$W_{0к2}$ – номинальный объём кузова самосвала с «шапкой»;
$k_{н2}$ – коэффициент наполнения кузова самосвала;
ρ – удельный вес породы в целике;
$q_{ег}$ – удельный путевой расход горючего самосвалом в гружёном состоянии;
v – трассовая скорость.

Удельные затраты на фабричное крупное и среднее дробление разрушенной горной породы – $З_{Др}$:

$$З_{Др} = 10^4 с_э \varepsilon \frac{d_{ср}}{3,6}\left(d_{ср} - d_В\right), \qquad (5)$$

где

$d_в$ – средний размер выходной фракции;
ε – удельная поверхностная энергоёмкость разрушения породы.

В виду того, что функция (1) выпуклая вниз, она имеет один экстремум, который является её глобальным минимумом, таким образом, для каждой скважины, при завершении её бурения, требуется решить уравнение

$$\frac{dZ}{d\left(d_{\text{ср}}\right)} = 0. \tag{6}$$

Однако, для того чтобы решить уравнение (6), необходимо знать телеметрические и расчётные выходные параметры бурения:

- телеметрические параметры: осевую нагрузку, частоту вращения бурового става, скорость бурения;
- расчётные параметры: удельную энергоёмкость, ожидаемый размер осколка бурового шлама, крепость породы, удельную поверхностную энергию разрушения породы.

Телеметрические параметры определяются бортовой телеметрической системой в процессе бурения и сохраняются на сервере. На основании этих данных с помощью фракционно-энергетической модели БВР определяются расчётные параметры.

Фракционно-энергетическая модель буровзрывного разрушения горной породы, связывающая параметры бурения и взрывания, описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned}
& nmF_{oc} \,/\, k_{зуб} S_{бм}\left(d_{бм}\right) v_{бр} S_{ск} = \sigma_{Мд}\left(f\right) \\
& d_{бм} = a_0 e^{a_1 f} f^{a_2} F_{oc}^{a_3} \left(\frac{n}{v}\right)^{a_{4-1}} \\
& d_{бм} = \aleph \left(\frac{k_1 F_{oc}}{\sigma_{MA}\xi_1}\right)^{2/3} \\
& k_d = a_0 e^{a_1 f} f^{a_2} F_{oc}^{a_3} \left(\frac{n}{v}\right)^{a_4} \\
& E_{бр} = \frac{8n\sigma_{MA}\xi_2}{k_d v_{бр} d_{cK}^2} \left(\frac{k_1 F_{oc}}{\sigma_{MA}\xi_1}\right)^{4/3} \\
& E_{ВЗ} = \frac{E_{бр}}{Q} \\
& t_{из} = 8 \times t_{р3} \times Q^2 \times \frac{P_{од}}{D^2 \rho_{BB}} \\
& q = E_{ВЗ} \,/\, e_{BB}
\end{aligned} \tag{7}$$

где

$\sigma_{мд}$ – напряжение мелкодисперсного разрушения; $E_{\text{бр}}$ – удельная энергоёмкость бурения [ДДж/м³]; F_{oc} – усилие на забой скважины $[\text{Н}]$; $d_{бм}$ – средний размер осколка бурового шлама [м] [5, с. 12];

$s_{ск}$ – площадь забоя скважины $\left[m^2\right]$;

$S_{бм}$ – площадь полной поверхности осколков бурового шлама 1 м³ породы $\left[m^2\right]$; $d_{\min} = \alpha\left(\sigma_{мд}, d_{бм}\right)$ – минимально возможный размер осколка бурового шлама $[\text{м}]$;

$d_{\max} = \beta\left(\sigma_{мд}, d_{бм}\right)$ – максимально возможный размер осколка бурового шлама [м]; $v_{\text{бр}}$ – скорость бурения [м/с;] n – частота вращения долота $\left[\text{с}^{-1}\right]$; $\mathbf{N}$ – масштабный коэффициент глубины лунки разрушения; $\aleph_1$ – масштабный коэффициент длины лунки разрушения;

$k_1 -$ показатель очистки забоя, при рациональном режиме бурения $k_1 = 1$; ξ_1 – масштабный коэффициент общей силы взаимодействия всех зубьев шарошечного долота с породой определяется через геометрические параметры вооружения шарошечного долота [4, с. 247–248]; ξ_2 – масштабный коэффициент величины крутящего момента, приложенного к долоту, который определяется через геометрические параметры вооружения шарошечного долота [4, с. 266–267], $Q = \frac{d_{\text{ср}}}{d_{\text{бм}}}$, где $d_{\text{ср}} -$ заданный размер среднего куска [м], взорванной породы в развале; $t_{\text{из}} -$ интервал межскважинного замедления [мс]; $P_{\text{од}} -$ осевое давление [МПа]; $D -$ скорость детонации [м/с]; $\rho_{\text{вв}} -$ плотность ВВ [кг/м³]; $t_{\text{рв}} = 7,2 \times 10^3 \times R \times \frac{0,7 \times (1,1f + \rho_n) \times s_{ск}}{F_{ос} \times n \times N_{вз}}$ (Шигин $[6$, с. 62]) [мс]), $R_{\text{ш}}$ – радиус шарошки [м]; $F_{\text{ос}} -$ осевое усилие $[\text{МН}]$; $\rho_{\text{п}} -$ плотность горной породы [кг/м³]; $N_{\text{вз}} -$ число взаимодействующих зубцов шарошек долота за его один оборот; $q -$ удельный расход взрывчатки [кг/м³].

Результаты решения проблемы. Опытно-промышленное испытание новой цифровой технологии оперативной оптимизации буровзрывных работ выполнялось на карьере Кумтор в результате чего было получено подтверждение адекватности моделей БВР (7) и модели затрат (1). Относительные отклонения рассчитанных параметров БВР от фактических составили:

- напряжение мелкодисперсного разрушения $\sigma_{\text{мд}} - (0,7 - 2,3)\%$;
- удельная энергоёмкость бурения $E_{\text{бр}} - 0\ \%$ (100 % попадание в существующие технологические интервалы);
- скорость бурения $v_{\text{бр}} - (0,5 - 2,5)\%$;
- удельный расход взрывчатых веществ q – (8,3–10) %;
- интервал межскважинного замедления взрывания $t_{\text{из}} - 15\%$.

На экспериментальном участке (20 скважин) анализ затрат показал, что оптимизированное энергопотребление на БВР ниже фактического на $12\ \%$, а соответствующие удельные затраты карьерно-фабричных работ ниже на 14–15 %, что в годовом исчислении равносильно экономии финансовых средств в размере 282 миллиона сомов, при объёме горных работ – 47×10^6 м^3 в 2021 году.

Заключение

- Показана адекватность фракционно-энергетических моделей.
- Настоящий подход позволяет оперативно решать задачу оптимизации технико-экономических параметров БВР для каждой скважины блока в части: рационализация текущих параметров режима бурения; удельного расхода ВВ, при заданном качестве дробления; затрат на карьерные и фабричные работы.
- Преимуществом изложенного метода являются: вычислительная оперативность основных параметров БВР; независимость от классических физико-механических параметров породы; независимость от субъективных факторов; оперативная рационализация параметров БВР.
- Снижение карьерно-фабричных энергозатрат может составлять 14–15 %.
- Возможное сокращение стоимости энергозатрат по карьерно-фабричным работам карьера Кумтор по итогам 2021 года оценивается в 295×10^6 сомов.

Литература

1. *Кирпичёв М.В.* Теория подобия / М.В. Кирпичёв. – М.: Изд-во Академии наук СССР, 1953. .
2. *Гухман А.А.* Введение в теорию подобия / А.А. Гухман. – 2-е изд., дополненное и переработанное. – М.: Высшая школа, 1973. – 296 с.
3. *Крюков Г.М.* Физика разрушения горных пород при бурении и взрывании: учебник для вузов / Г.М. Крюков. – М.: Изд-во «Горная книга», 2006. – Т. 1. – 330 с.
4. *Бибик И.П.* Метод определения оптимальных параметров буровзрывных работ для технологических потоков карьера. URL:https://giabonline.ru/files/Data/2005/3/4_Bibik_4.pdf. 2005 год.
5. *Угольников Н.В., Симаков Д.Б., Угольникова М.В.* Оптимизация энергозатрат на карьерах. URL:https://cyberleninka.ru/article/n/optimizatsiya-energozatrat-na-karierah/viewer. 2011 год.
6. *Шигин А.О.* Повышение ресурса шарошечного бурового инструмента за счёт оптимизации режимных параметров при бурении сложно-структурных массивов горных пород / А.О. Шигин // Вестник ИрГТУ, Иркутск. – 2014. – № 10 (93). – С. 59–67.

Э.Ф. Абдылдаева
(Кыргызстан)

ОПТИМАЛЬНОЕ ВЕКТОРНОЕ УПРАВЛЕНИЕ УПРУГИМИ КОЛЕБАНИЯМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ ФРЕДГОЛЬМОВО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЕМ

Аннотация. В статье исследована нелинейная задача оптимального векторного управления упругими колебаниями, описываемыми фредгольмово интегро-дифференциальными уравнениями в случае, когда функция внешнего источника нелинейно зависит от управляющих параметров. Установлено, что система нелинейных интегральных уравнений, полученных относительно компонентов векторного оптимального управления, обладает свойством равных отношений, которые позволяют упростить процедуру построения решения задачи нелинейной оптимизации. Разработан алгоритм построения решений задачи нелинейной оптимизации.

Ключевые слова: обобщенное решение краевой задачи; векторное оптимальное управление; функционал; принцип максимума; система нелинейных интегральных уравнений; свойство равных отношений.

Рассмотрим задачу минимизации квадратичного интегрального функционала:

$$J[u_1(t),....,u_m(t)] = \int_0^T \{[[v(T,x) - \xi_1(x)]^2 + \\ +[v_t(T,x) - \xi_2(x)]^2\}dx + \beta\int_0^T \sum_{k=1}^m u_k^2(t)dt, \beta > 0, \tag{1}$$

на множестве решений краевой задачи

$$V_{tt} - AV = \lambda\int_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau + g(t,x)f\left[t,u_1(t),\dots,u_m(t)\right], x \in Q, 0 < t < T \tag{2}$$

$$V(0,x) = \psi_1(x), V_t(0,x) = \psi_2(x), x \in Q, \tag{3}$$

$$\Gamma V(t,x) \equiv \sum_{i,j}^{n} a_{ij}(x) V_{x_j} \cos(v, x_i) + a(x)V = 0,\ x \in \gamma, 0 < T, \tag{4}$$

где

А – эллиптический оператор; v – вектор нормали исходящий из точки $x \in \gamma; K(t,\tau)$ – заданная функция из гильбертово пространства $H(\mathrm{D}); \psi_1(x) \in H_1(Q), \psi_2(x) \in H(Q)$, $\xi_1(x) \in H(Q)$, $\xi_2(x) \in H(Q), f\left[t, u_1(t), \ldots, u_m(t)\right] \in H(0,T)$ заданные функции. Функция внешнего воздействия $f\left[t, u_1(t), \ldots, u_m(t)\right]$ нелинейно зависит от управлений $u_1(t), \ldots, u_m(t)$, $u_i(t) \in H(0,\ \mathrm{T})$, $i = 1,2,3,\ldots,m$ и удовлетворяет условиям

$$f_{u_i}\left[t, u_1(t), \ldots, u_m(t)\right] \neq 0,\ \forall t \in (0,T), i = 1,2,3,\ldots,m; \tag{5}$$

T – фиксированный момент времени, постоянная $\alpha > 0; H(Q)$ – гильбертово пространство функций, определенных на множестве $Y.H_1(Q)-$ соболево пространство первого порядка.

Требуется найти такое векторное управление $\left(u_1^0(\mathrm{t}), \ldots u_m{}^0(t)\right) \in H^m(0,T)$, (где $H^m(0,T)$ – декартово произведение M пространств $H(0,T)$), которое вместе с соответствующим ему решением $V^0(t,x)$ краевой задачи (2)–(4) доставляет наименьшее возможное значение функционалу (1).

При этом $u_1(t), \ldots u_m(t)$ называются оптимальными управлениями, а $V^0(t,x)$ – оптимальным процессом.

Обобщенное решение краевой задачи (2)–(4) определяется методом Фурье. Коэффициент Фурье определяется, как решение интегрального уравнения, которое является следствием присутствия интегрального оператора Фредгольма в уравнение краевой задачи.

Поскольку каждое векторное управление $u_1(t), \ldots u_m(t)$ единственным образом определяет управляемый процесс $V(t,x)$, то управлению

$\left(u_1(t) + \Delta u_1(t), \ldots, u_m(t) + \Delta u_m(t)\right)$ соответствует решение краевой задачи (2)–(4) вида $V(t,x) + \Delta V(t,x)$, где $\Delta V(t,x)$ приращение соответствующее приращению $\left(u\Delta_1(\mathrm{t}), \ldots \Delta u_m(t)\right)$.

Согласно методике вывода принципа максимума $[1, 2, 3, 4]$ приращение функционала (1) можно представить в виде

$$\Delta\overline{J}\left(u_1(t), \ldots u_m(t)\right) = -\int_0^T \Delta\Pi\left(t, V(t,x), \omega(t,x), u_1(t), \ldots u_m(t)\right) dt +$$

$$+ \int_Q \left\{\Delta V^2(T,x) + \Delta V_t^2(T,x)\right\} dx,$$

где

$$\Pi\left[t, x, V(t,x), \omega(t,x), u_1(t), \ldots, u_m(t)\right] =$$
$$= \int_Q g(t,x)\omega(t,x)dx \cdot f\left(t, u_1(t), \ldots, u_m(t)\right) - 2\beta \sum_{k-1}^{m} u_k^2(t), \tag{6}$$

а функция $\omega(t,x)$ является решением сопряженной краевой задачи

$$\omega_{tt} - A\omega = \lambda\int_0^T K(\tau,t)\,\omega(\tau,x)\,d\tau x \in Q, 0 \le t < T,$$
$$\omega(T,x) + 2\left[V_t(T,x) - \xi_2(x)\right] = 0, \omega_t(T,x) - 2\left[V(T,x) - \xi_1(x)\right] = 0 \tag{7}$$
$$\Gamma\omega(t,x) = \sum_{i,j=1}^{n}\left(a_{ij}(x)\,\omega_{x_j}(t,x)\right)_{x_i} - c(x)\,\omega(t,x) = 0.$$

Как следствие принципа максимума [1, 2, 3, 4], функция оптимального управления должна удовлетворять следующим условиям:

$$2\beta\frac{u_i(t)}{f_{u_i}} = \int_Q g(t,x)\,\omega(t,x)\,dx, i = 1,2,3,\ldots,m, \tag{8}$$

$$\prod_{j=1}^{k} f_{u_j}\begin{vmatrix} \left(\dfrac{u_1}{f_{u_1}}\right)_{u_1} & \ldots & \left(\dfrac{u_1}{f_{u_1}}\right)_{u_k} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & & \ldots \\ \left(\dfrac{u_k}{f_{u_k}}\right)_{u_1} & \ldots & \left(\dfrac{u_k}{f_{u_k}}\right)_{u_k} \end{vmatrix} > 0, k = 1,2,3,\ldots,m \tag{9}$$

которые называются условиями оптимальности.

Решение сопряженной краевой задачи: подставляя в условие оптимальности типов равенства, получаем следующую систему равенств:

$$2\beta\frac{u_1(t)}{f_{u_1}} = \ldots = 2\beta\frac{u_m(t)}{f_{u_m}} =$$
$$= -2\sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)\,\mathcal{E}_n^*(T-t)\int_0^T G_n(T-\tau)\,g_n(\tau)\,f\left(\tau,u_1(\tau),\ldots,u_m(\tau)\right)d\tau + \tag{10}$$
$$+2\sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)\,\varepsilon_n^*(T-t)\,h_n.$$

Таким образом, оптимальное управление определяется как решение системы нелинейных интегральных уравнений (10), где функция внешнего источника $f\left[t,u_1(t),\ldots,u_m(t)\right]$ должна удовлетворять условиям оптимальности (7) и (2). Эти условия ограничивают класс функций внешних воздействий $f\left[t,u_1(t),\ldots,u_m(t)\right]$. Далее будем считать, что для функции $f\left[t,u_1(t),\ldots,u_m(t)\right]$ выполненными эти условия для любых управлений $u_i(t) \in H(0,T), i = 1,2,3,\ldots,m$.

Поскольку система (10) обладает свойством равных отношений, то, согласно методике работы [5], введем обозначение

$$\beta\frac{u_1(t)}{f_{u_1}} = \ldots = \beta\frac{u_m(t)}{f_{u_m}} = p(t). \tag{11}$$

В силу (9), отсюда, функции $u_1(t),\dots,u_m(t)$ определяются однозначно, т. е. имеют места следующие соотношения:

$$u_i(t)=\varphi_i\big(t,p(t),\beta\big),\ i=1,2,3,\dots,m. \tag{12}$$

Учитывая (11) и (12) из (10), имеем следующее нелинейное интегральное уравнение относительно функции $p(t)$:

$$p(t)+\sum_{n=1}^{\infty}g_n(t)\varepsilon_n^*(T-t)\int_0^T G_n(T-\tau)g_n(\tau)f\Big(\tau,\varphi_1\big(\tau,p(\tau),\beta\big),\dots,\varphi_m\big(\tau,p(\tau),\beta\big)\Big)d\tau=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(t)\varepsilon_n^*(T-t)h_n. \tag{11}$$

Введя обозначения

$$(t)\mathcal{E}_n^*(T-t)\int_0^T G_n(T-\tau)g_n(\tau)f\Big(\tau,\varphi_1\big(\tau,p(\tau),\beta\big),\dots,\varphi_m\big(\tau,p(\tau),\beta\big)\Big)d\tau G[p]=-\sum_{n=1}^{\infty}g_n$$

$$h(t)=\sum_{n=1}^{\infty}g_n(t)\mathcal{E}_n^*(T-t)h_n.$$

(12)

Уравнение (13) перепишем в операторной форме

$$p=G[p]+h \tag{13}$$

и исследуем его разрешимость.

Решение $p^0(t)$ нелинейного интегрального уравнения (10): подставляя в систему (12) находим искомое векторное оптимальное управление

$$u_i^0(t)=\varphi_i\big[t,p^0(t),\beta\big],\ i=1,2,3,\dots,m. \tag{14}$$

Оптимальный процесс $V^0(t,x)$, т. е. решение краевой задачи (2)–(4), соответствующее векторному оптимальному управлению $\big(u_1^0(t),\dots,u_m^0(t)\big)$, определяется по формуле

$$V^0(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\psi_n(t,\lambda)+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^T\varepsilon_n(t,\eta,\lambda)g_n(\tau)f\big[\tau,u_1^0(\eta),\dots,u_m^0(\eta)\big]d\eta\right\}z_n(x). \tag{15}$$

Минимальное значение функционала (1) вычисляется по формуле

$$J\big[u_1^0(t),\dots u_m^0(t)\big]=$$
$$=\int_0^T\!\!\int\Big\{\big[V^0(T,x)-\xi_1(x)\big]^2+\big[V_t^0(T,x)-\xi_2(x)\big]^2\Big\}dx+\beta\int_0^T\sum_{k=1}^{m}\big(u_k^0(t)\big)^2dt,\ \beta>0. \quad (16).$$

Тройка этих значений $\Big\{\big(u_1^0(t),\dots,u_m^0(t)\big),V^0(t,x),J\big(u_1^0(t),\dots,u_m^0(t)\big)\Big\}$ является полным решением данной задачи оптимизации.

Литература

1. *Egorov A.I.* Об оптимальном управлении процессами в распределенных объектах / A.I. Egorov // Прикладная математика и механика. – 1963. – Т. XXVII. – № 4.
2. *Egorov A.I.* Об оптимальном управлении процессами в некоторых системах с распределенными параметрами / A.I. Egorov // Автоматика и телемеханика. 1964. – Т. XXV. № 5.
3. *Сиразетдинов Т.К.* К теории оптимальных процессов с распределенными параметрами / Т.К. Сиразетдинов // Автоматика и телемеханика. – 1964. – Т. XXV. – № 4.
4. *Komkov Vadim.* Optimal Control Theory For The Damping Of Vibrations Of Simple Elastic Systems. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.
5. *Kerimbekov A.K.* Nonlinear optimal control of linear systems with distributed parameters. – Bishkek, 2003. – 224 p.

Б.Ы. Аширбаев, Ж.А. Алтымышова
(Кыргызстан)

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧИ С КВАДРАТИЧНЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ

Аннотация. В статье предложен асимптотический способ решения сингулярно-возмущенной дискретной задачи с квадратичным функционалом. Решение исходной задачи построено для эквивалентной системы, полученной при разделении переменных состояния рассмотренной системы. В процессе решений задачи нелинейное разностное матричное уравнение Риккати преобразуется к трем линейным разностным уравнениям, в результате решений этих уравнений получено оптимальное управление данной задачи.

Ключевые слова: разностные уравнения Риккати и Ляпунова; переходная матрица; квадратичный функционал.

Пусть движения объекта описывается линейной сингулярно-возмущенной дискретной системой вида

$$y(t+T) = A(t)y(t) + B(t)u(t), \tag{1}$$

где

$y(t) = (x(t) \;\; z(t))',\ x(t) - (n \times r),\ z(t) - (m \times r) -$ векторы переменных состояния,

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) & A_2(t) \\ \frac{1}{\mu} A_3(t) & \frac{1}{\mu} A_4(t) \end{pmatrix}, B(t) = \begin{pmatrix} B_1(t) \\ \frac{1}{\mu} B_2(t) \end{pmatrix},$$

$A_1(t) - (n \times n),\ A_2(t) - (n \times m),\ A_3(t) - (m \times n), A_4(t) - (m \times m),$
$B_1(t) - (n \times r), B_2(t) - (m \times r) -$ матрицы, $0 < T < 1 -$ малый шаг, $\mu -$ малый параметр $0 < \mu \ll 1,\ u(t) \in R^r$ вектор управления,

$$t \in \Omega_T = \{t : t = kT,\ \ k = 0, 1, \cdots, M-1\} \subset \{t : 0 \le t \le 1\},\ \ M = 1/T.$$

Для системы (1) заданы начальные условия:

$$y(0) = y_0 = \left(x(0)\ z(0)\right)' = \left(x_0\ z_0\right)'. \tag{2}$$

Требуется найти оптимальное управление $u^*(t,\mu) \in R^r$, доставляющее минимум функционала

$$J(u) = \sum_{i=0}^{M-1} u'(iT)u(iT) + y'(MT)Qy(MT) \tag{3}$$

на траекториях (1), (2). Предположим, что

1. Матрицы $A_i(t)$, $i = \overline{1,4}$ – определены, равномерно ограничены и равномерно непрерывны со своими производными при $t \in [0,1]$.

2. Собственные значения матрицы $A_4(t)$ удовлетворяют неравенству

$$\left| Re\lambda_j(t) \right| \le \gamma < 1, \quad j = \overline{1,m},$$

где γ – некоторая постоянная.

При выполнении условий 1 и 2 в работе [1] получена система вида

$$\tilde{x}(t+T) = \tilde{A}_1(t,\mu)\tilde{x}(t) + \tilde{B}_1 u(t), \tag{4}$$

$$\mu\tilde{z}(t+T) = \tilde{A}_4(t,\mu)\tilde{z}(t) + \tilde{B}_2(t,\mu)u(t), \tag{5}$$

где $x(t,\mu) = \tilde{x}(t,\mu) - \mu N(t,\mu)\tilde{z}(t,\mu)$, $z(t,\mu) = \tilde{z}(t,\mu) + H(t,\mu)x(t,\mu)$,

$$\tilde{A}_1(t,\mu) = A_1(t) + A_2(t)H(t,\mu),\ \ \tilde{A}_4(t,\mu) = A_4(t) - \mu H(t,\mu)A_2(t),$$

$$\tilde{B}_1(t,\mu) = B_1(t) + N(t,\mu)\tilde{B}_2(t,\mu),\ \ \tilde{B}_2(t,\mu) = B_2(t,\mu) - \mu H(t,\mu)B_1(t).$$

Матрицы $H(t,\mu)$ и $N(t,\mu)$ удовлетворяют следующим матричным разностным уравнениям Риккати и Ляпунова [1]:

$$\begin{aligned} &\mu H(t+T,\mu) + \mu H(t,\mu)A_1(t) + \mu H(t,\mu)A_2(t)H(t,\mu) = \\ &= A_3(t) - A_4(t)H(t,\mu) = 0, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\mu N(t+T,\mu) + \mu\tilde{A}_1(t,\mu)N(t,\mu) - N(t,\mu)\tilde{A}_4(t,\mu) - A_2(t) = 0. \tag{7}$$

Начальные условия системы (4), (5) определяются соотношениями:

$$\tilde{x}(0) = \tilde{x}_0; \quad \tilde{z}(0) = \tilde{z}_0, \tag{8}$$

где $\tilde{x}_0 = x_0 + \mu N_0\tilde{z}_0$, $\tilde{z}_0 = z_0 - H_0 x_0$, $H_0 = -A_4^{-1}A_3$, $N_0 = -A_2 A_4^{-1}$. Тогда с учетом (4)–(8) функционал (3) имеет вид

$$J(u) = \sum_{i=0}^{M-1} u'(iT)u(iT) + \tilde{y}'(MT)P\tilde{y}(MT), \tag{9}$$

где $\tilde{y}(MT) = \left(\tilde{x}(MT)\ \ \tilde{z}(MT)\right)'$, $P = D_M' Q D_M$, $P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2' & P_3 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} Q_1 & Q_2 \\ Q_2' & Q_3 \end{pmatrix}$,

$$D_M = \begin{pmatrix} E_n & -\mu N_M \\ H_M & E_m - \mu H_M N_M \end{pmatrix}, \ H_M = H\left(MT\right), \ N_M = N\left(MT\right).$$

Оптимальным управлением для (4), (5) является функция [2]

$$u^*\left(t,\mu\right) = -\tilde{B}'\left(t,\mu\right)K\left(t,P,M\right)\tilde{y}\left(t\right), \tag{10}$$

где $K = K\left(t,P,M\right)$ удовлетворяет матричному разностному уравнению

$$K\left(t+T\right) = -K\tilde{A}\left(t\right) - \tilde{A}'\left(t\right)K + K\tilde{B}\left(t\right)\tilde{B}'\left(t\right)K, \ K\left(MT\right) = P. \tag{11}$$

Предполагаем, что K имеет обратную матрицу, тогда [3]

$$K^{-1}\left(t+T\right) = -K^{-1}K\left(t+T\right)K^{-1}. \tag{12}$$

Умножая (11) справа и слева на матрицу K^{-1}, с учетом (12) получаем

$$W\left(t+T\right) = W\left(t\right)\tilde{A}\left(t\right) + W'\left(t\right)\tilde{A}'\left(t\right) - \tilde{B}\left(t\right)\tilde{B}'\left(t\right), \ W\left(MT\right) = P^{-1}. \tag{13}$$

Введем блочную матрицу

$$W\left(t\right) = \begin{pmatrix} W_1\left(t\right) & W_2\left(t\right) \\ W_2'\left(t\right) & \dfrac{1}{\mu}W_3\left(t\right) \end{pmatrix},$$

где $W_1\left(t\right)$ и $W_3\left(t\right)$ симметрические матрицы $\left(n\times n\right)$ и $\left(m\times m\right)$ соответственно, $W_2\left(t\right)$ $\left(n\times m\right)$. Тогда уравнение (13) записывается в форме

$$W_1\left(t+T\right) = \tilde{A}_1\left(t\right)W_1\left(t\right) + W_1'\left(t\right)\tilde{A}_1'\left(t\right) - \tilde{B}_1\left(t\right)\tilde{B}_1'\left(t\right), W_1\left(MT\right) = S_1, \tag{14}$$

$$\mu W_2\left(t+T\right) = \mu\tilde{A}_1\left(t\right)W_2\left(t\right) + W_2'\left(t\right)\tilde{A}_4'\left(t\right) + \tilde{B}_1\left(t\right)\tilde{B}_2'\left(t\right), \ W_2\left(MT\right) = S_2,$$

$$\mu W_3\left(t+T\right) = \tilde{A}_4\left(t\right)W_3\left(t\right) + W_3'\left(t\right)\tilde{A}_4'\left(t\right) + \tilde{B}_2\left(t\right)\tilde{B}_2'\left(t\right), \ W_3\left(MT\right) = S_3,$$

где $S = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2' & S_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2' & P_3 \end{pmatrix}^{-1}$, $P_1 = Q_1 + H_M'Q_2' + Q_2H_M + H_M'Q_3H_M$,

$$P_2 = Q_2 + H_M'Q_3 - \mu P_1N_M,$$

$$P_3 = Q_3 - \mu\left(Q_2' + Q_3H_M\right)N_M - \mu N_M'\left(Q_2 + H_M'Q_3\right) + \mu^2N_M'P_1N_M.$$

Пусть $F\left(t,\mu\right)$ и $\Psi\left(t,\mu\right)$ переходные матрицы уравнений, соответственно:

$$\tilde{x}\left(t+T\right) = \tilde{A}_1\left(t,\mu\right)\tilde{x}\left(t\right), \ \mu\tilde{z}\left(t+T\right) = \tilde{A}_4\left(t,\mu\right)\tilde{z}\left(t\right). \qquad 15)$$

Тогда $F\left(t,\mu\right)$ и $\Psi\left(t,\mu\right)$ соответственно удовлетворяют уравнениям:

$$F\left(t+T,\mu\right) = \tilde{A}_1\left(t,\mu\right)F\left(t,\mu\right), \ F\left(0,0\right) = E_n, \tag{16}$$

$$\mu\Psi\left(t+T,\mu\right)=\tilde{A}_4\left(t,\mu\right)\Psi\left(t,\mu\right),\ \ \Psi\left(0,0\right)=E_m. \qquad (17)$$

С учетом (16) и (17) решения уравнения (14) можно представить в виде:

$$W_1\left(t,\mu\right)=F\left(t,\mu\right)S_1F'\left(t,\mu\right)+\bar{W}_1\left(t,\mu\right),$$

$$W_2\left(t,\mu\right)=F\left(t,\mu\right)S_2\Psi'\left(t,\mu\right)+\bar{W}_2\left(t,\mu\right),$$

$$W_3\left(t,\mu\right)=\Psi\left(t,\mu\right)S_3\Psi'\left(t,\mu\right)+\bar{W}_3\left(t,\mu\right),$$

где $\bar{W}_1\left(t,\mu\right)=\sum_{i=0}^{M-1}F\left(iT,\mu\right)\tilde{B}_1\left(iT\right)\tilde{B}_1^{'}\left(iT\right)F'\left(iT,\mu\right),$ (18)

$$\bar{W}_2\left(t,\mu\right)=\left(1/\mu\right)\sum_{i=0}^{M-1}F\left(iT,\mu\right)\tilde{B}_1\left(iT\right)\tilde{B}_2^{'}\left(iT\right)\Psi'\left(iT,\mu\right),$$

$$\bar{W}_3\left(t,\mu\right)=\left(1/\mu\right)\sum_{i=0}^{M-1}\Psi\left(iT,\mu\right)\tilde{B}_2\left(iT\right)\tilde{B}_2^{'}\left(iT\right)\Psi'\left(iT,\mu\right).$$

В результате сформулируем следующую теорему.

Теорема. Если матрицы W_1 и $L=W_3-W_2^{'}W_1^{-1}W_2$ при $0<\mu\ll 1$ для всех $0\le t\le M-1$ невырождены, то существует управление вида (11), которое доставляет минимум критерия (10). При этом симметричную матрицу

$K=K\left(t,P,M\right)$ можно представить в виде

$$K=\begin{pmatrix} K_1 & \mu K_2 \\ \mu K_2^{'} & \mu K_3 \end{pmatrix},\ K_1=W_1^{-1}+W_1^{-1}W_2L^{-1}W_2W_1^{-1},$$

$$K_2=-W_1^{-1}W_2L^{-1},\ K_3=L^{-1}.$$

Литература

1. *Аширбаев Б.Ы.* Об одном способе построения переходной матрицы линейной дискретной управляемой системы с малым шагом / Б.Ы. Аширбаев // Горный журнал, научно-технический журнал, Бишкек. – 2021. – Т. 2 (1). – С. 13–17.
2. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами / Ю.Н. Андреев. – М.: Наука, 1976. – 424 с.
3. *Пропой А.И.* Элементы теории оптимальных дискретных систем / А.И. Пропой. – М.: Наука, 1973. – 256 с.

Б.Ы. Аширбаев, Ж.А. Алымбаева
(Кыргызстан)

ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ДЛЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ ТЕМПЕРАТУРНЫМИ РЕЖИМАМИ ТЕПЛОВОГО ОБЪЕКТА

Аннотация. В статье предложен способ построения оптимального энергосберегающего управления для регулирования температурными режимами динамической системы теплового объекта. Для системы, полученной при полном разделении переменных состояния исходной системы, построены оптимальное энергосберегающее управление, соответствующие оптимальные функции усредненной температуры нагреваемого (охлаждаемого) объекта и скорость изменения этой температуры.

Ключевые слова: оптимальное энергосберегающее управление; усредненная температура нагреваемого (охлаждаемого) объекта; уравнения Риккати и Ляпунова; переходная матрица.

Рассмотрим линейную дискретную систему

$$y(t+\mu) = Ay(t) + Bu(t), \tag{1}$$

где $y(t) = \left(x(t)\ z(t)\right)', x(t), z(t) \in R^n, A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix},$

$A_i\left(i = \overline{1,4}\right) - (n \times n), B_j\,(j = 1,2) - (n \times r) -$ постоянные матрицы,

$u(t) - r$ -мерный вектор управления, $M = 1/\mu,\ 0 < \mu < 1,$

$t \in \Omega = \{t : t = k\mu,\ \ k = 0, 1, \cdots, M-1\} \subset \Omega = \{t : 0 \le t \le 1\},$

штрих обозначает транспонирование.

В уравнении (1) первая компонента вектора $y -$ усредненная температура нагреваемого (охлаждаемого) объекта, вторая – скорость изменения температуры [1].

Заданы начальные и конечные условия системы (1):

$$y(0) = y_0, \tag{2}$$

$$y(M) = y_M. \tag{3}$$

Условие 1. Матрица A устойчивая, т. е. действительные части всех ее собственных значений удовлетворяют условию

$$\left|Re\lambda_i\right| < q_0 < 1,\ \ \lambda_i\ \left(i = \overline{1,n}\right).$$

При выполнении условия 1 требуется перевести систему (1) из состояния (2) в состояние (3), чтобы при этом функционал

$$I_Э = \sum_{k=0}^{M-1} u'(t)u(t) \tag{4}$$

принимал наименьшее возможное значение, где $I_Э -$ оценивает затраты энергии [2].

Как показано в [3], с помощью замены

$$x(t) = \tilde{x}(t) - N\tilde{z}(t),\ z(t) = \tilde{z}(t) + Hx(t) \tag{5}$$

из уравнения (1) получаем систему

$$\tilde{x}(t+\mu) = \tilde{A}_1\tilde{x}(t) + \tilde{B}_1u(t), \tag{7}$$

$$\tilde{z}(t+\mu) = \tilde{A}_4\tilde{z}(t) + \tilde{B}_2u(t), \tag{8}$$

где $\tilde{A}_1 = A_1 + A_2H,\ \tilde{A}_4 = A_4 - HA_2, \tilde{B}_1 = B_1 + N\tilde{B}_2,\ \tilde{B}_2 = B_2 - HB_1.$ (9)

Матрицы $H = H(s),\ N = N(s) - n \times n$ удовлетворяют следующим матричным уравнениям Риккати и Ляпунова, соответственно:

$$HA_1 + HA_2H - A_4H - A_3 = 0, \tag{10}$$

$$\tilde{A}_1N - N\tilde{A}_4 - A_2 = 0. \tag{11}$$

Уравнения (7) и (8) перепишем в виде

$$\tilde{y}(t+\mu) = \tilde{A}\tilde{y}(t) + \tilde{B}u(t), \tag{13}$$

где $\tilde{y}(t) = (\tilde{x}(t)\ \tilde{z}(t))',\ \tilde{A} = diag(\tilde{A}_1\ \ \tilde{A}_4),\ \tilde{B} = (\tilde{B}_1\ \ \tilde{B}_2)'.$

Граничные условия системы (13) определяются соотношениями

$$\tilde{y}(0) = \tilde{y}_0 \tag{14}$$

$$\tilde{y}(M) = \tilde{y}_M, \tag{15}$$

где $\tilde{y}_0 = (\tilde{x}_0\quad \tilde{z}_0)',\ \tilde{x}_0 = x_0 + N_0\tilde{z}_0,\quad \tilde{z}_0 = z_0 - H_0x_0,$ (16)

$$\tilde{x}_M = x_M + N_M\tilde{z}_M,\quad \tilde{z}_M = z_M - H_Mx_M. \tag{17}$$

Условие 2. Матрицы $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_4$ устойчивые, т. е. для собственных значений λ_ν и γ_ν $(\nu = \overline{1,n})$ матрицы $\tilde{A}_1$ и $\tilde{A}_4$ выполняются ограничения

$$|Re\lambda_\nu| \le q_1 < 1,\quad |Re\gamma_\nu| \le q_2 < 1.$$

Теперь задачу (1)–(4) сформулируем в форме: требуется перевести систему (13) из состояния (14) в состояние (15) причем так, чтобы функционал (4) принимал наименьшее возможное значение.

Решения уравнения (13) с начальными условиями (14), (15) имеет вид

$$\tilde{y}(k\mu) = \tilde{A}^k\tilde{y}_0 + \sum_{i=0}^{k-1}\tilde{A}^{k-i-1}\tilde{B}u(i\mu), \tag{18}$$

С учетом (15), (17) из (18) имеем

$$\sum_{i=0}^{M-1}\tilde{A}^{M-i-1}\tilde{B}u(iT) = \alpha_M, \tag{19}$$

где $\alpha_M = \begin{pmatrix}\alpha_M^1 & \alpha_M^2\end{pmatrix}'$, $\alpha_M^1 = \tilde{x}_M - \tilde{A}_1^M \tilde{x}_0$, $\alpha_M^2 = \tilde{z}_M - \tilde{A}_4^M \tilde{z}_0$.

Тогда управление, обеспечивающее перевод системы (13) из начального состояния (14) в конечное состояние (15), определяется в форме [1, 9].

$$u(k\mu) = \tilde{B}' \left(\tilde{A}^{k-i-1}\right)' C, \ i = 0,1,\cdots,k-1, \tag{20}$$

где $W \cdot C = \alpha_M$, $W = \begin{pmatrix} W_1 & W_2 \\ W_2' & W_3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$, (21)

$$W_1 = \sum_{i=0}^{M-1} \tilde{A}_1^{M-i-1} \tilde{B}_1 \tilde{B}_1' \left(\tilde{A}_1^{M-i-1}\right)',$$

$$W_2 = \sum_{i=0}^{M-1} \tilde{A}_1^{M-i-1} \tilde{B}_1 \tilde{B}_2' \left(\tilde{A}_4^{M-i-1}\right)', \ W_3 = \sum_{i=0}^{M-1} \tilde{A}_4^{M-i-1} \tilde{B}_2 \tilde{B}_2' \left(\tilde{A}_4^{M-i-1}\right)'.$$

При выполнении условия 2 и в случае $|W_1| \neq 0$ сформулируем следующую теорему.

Теорема. Если матрица W имеет максимальный ранг, то система (13) является управляемой. Существует оптимальное энергосберегающее управление $\mathrm{u}^*(\mathrm{k}\mu)$, которое переводит систему (13) из состояния (14) в состояние (15), определяется формулой

$$u^*(k\mu) = \tilde{B}_1' \left(\tilde{A}_1^{M-k-1}\right)' r_M^1 + \tilde{B}_2' \left(\tilde{A}_4^{M-k-1}\right)' r_M^2, \tag{22}$$

где $r_M^1 = \left(W_1^{-1} + W_1^{-1} W_2 K^{-1} W_2' W_1^{-1}\right)\alpha_M^1 - W_1^{-1} W_2 K^{-1} \alpha_M^2$,

$$r_M^2 = -K^{-1} W_2' W_1^{-1} \alpha_M^1 + K^{-1} \alpha_M^2.$$

Усредненная температура нагреваемого (охлаждаемого) объекта и скорость изменения температуры, соответствующие оптимальному энергосберегающему управлению $u^*(k\mu)$, определяются формулами

$$\tilde{x}(k\mu) = \tilde{A}_1^k \tilde{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{A}_1^{k-i-1} \tilde{B}_1 \tilde{B}_1' \left(\tilde{A}_1^{k-i-1}\right)' r_M^1 + \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{A}_1^{k-i-1} \tilde{B}_1 \tilde{B}_2' \left(\tilde{A}_4^{k-i-1}\right)' r_M^2, \tag{23}$$

$$\tilde{z}(k\mu) = \tilde{A}_4^k \tilde{z}_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{A}_4^{k-i-1} \tilde{B}_2 \tilde{B}_1' \left(\tilde{A}_1^{k-i-1}\right)' r_M^1 + \sum_{i=0}^{k-1} \tilde{A}_4^{k-i-1} \tilde{B}_2 \tilde{B}_2' \left(\tilde{A}_4^{k-i-1}\right)' r_M^2.$$

Литература

1. *Муромцев Д.Ю.* Полный анализ задачи энергосберегающего управления динамическими режимами барабанной сушильной установки / Д.Ю. Муромцев, А.Н. Грибков, В.Н. Шамкин, И.А. Куркин // Информационно-управляющие системы. – 2017. – № 4. – С. 35–43.
2. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением / Н.Н. Красовский. – М.: Наука, 1968. – 476 с.

3. *Аширбаев Б.Ы.* Декомпозиция линейной дискретной управляемой системы с малым шагом / Б.Ы. Аширбаев // Вестник КГУСТА. – Бишкек, 2019. – № 2 (64). – С. 243–248.
4. *Аширбаев Б.Ы.* Об одном способе построения переходной матрицы линейной дискретной управляемой системы с малым шагом / Б.Ы. Аширбаев // Горный журнал, научно-технический журнал. – 2021, Бишкек. – Т. 2 (1). – С. 13–17.
5. *Куо Б.* Теория и проектирование цифровых систем управления / Б. Куо. – М.: Машиностроение, 1986. – 448 с.
6. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1966. – 577 с.

С.Б. Доулбекова, А.К. Керимбеков
(Кыргызстан)

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССОВ, ОПИСЫВАЕМЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА УПРАВЛЕНИЕ

Аннотация. В статье исследованы задачи нелинейной оптимизации колебательных процессов, описываемые интегро-дифференциальными уравнениями с интегральным оператором Фредгольма в частных производных в случае, когда функция внешнего источника нелинейна относительно управляющих параметров и при наличии ограничения на управление. Критерием качества управления является интегральный функционал. Установлено, что искомое управление определяется как решение бесконечномерной системы нелинейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Ее разрешимость исследована операторными методами. Доказано, что операторное уравнение имеет бесконечно много решений. Разработан алгоритм построения полного решения задачи нелинейной оптимизации.

Ключевые слова: колебательный процесс; обобщенное решение; функционал; оптимальное управление; нелинейное интегральное уравнение; операторное уравнение; сходимость.

Постановка задачи нелинейной оптимизации и уравнения искомого.

Рассмотрим задачу нелинейной оптимизации, где требуется найти управление $u^0(t,x) \in H(Q)$, такое, что функционал

$$J\left[u(t,x)\right] = \int_0^T\int_0^1 p\left[t,x,u(t,x)\right]dxdt \tag{1}$$

принимает наименьшее значение на множестве решений краевой задачи

$$\begin{aligned} &V_{tt} = V_{xx} + \lambda\int_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)d\tau + f\left[t,x,u(t,x)\right], 0 < x < 1, 0 < t \le T \\ &V(0,x) = \psi_1(x),\ V_t(0,x) = \psi_2(x), 0 < x < 1, \\ &V_x(t,0) = 0,\ V_x(t,1) + \alpha V(t,1) = 0, 0 < t < T \end{aligned} \tag{2}$$

при условии, что обобщенное решение

$$V(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\lambda\int_0^T R_n(t,s,\lambda)q_n(s)ds+q_n(t)\right]z_n(x)$$
$$q_n(t)=\psi_{1n}\cos\lambda_n t+\frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\sin\lambda_n t+\frac{1}{\lambda_n}\int_0^t\sin\lambda_n(t-\tau)f_n[\tau,u]d\tau \qquad (3)$$

удовлетворяет соотношению

$$V(T,x)=\xi(x). \qquad (5)$$

В этой задаче искомое управление следует находить так, чтобы управляемый процесс $V(t,x)$ за конечное время T перешел от начального состояния $V(0,x)=\psi_1(x)$ в конечное состояние (5).

Здесь функции

$$\psi_1(x)\in H_1(0,1),\psi_2(x)\in H(0,1),\xi(x)\in H(0,1),\ p\left[t,x,u(t,x)\right]\in H(Q)$$

и $f\left[t,x,u(t,x)\right]\in H(Q)$ заданы, а функции

$$f\left[t,x,u(t,x)\right] \text{ и } p\left[t,x,u(t,x)\right]$$

нелинейно зависят от функции управления.

Далее, из условия (5) получим бесконечномерную систему интегральных уравнений

$$\int_0^T\int_0^1 G_n(t,x,\lambda)f\left[t,x,u(t,x)\right]dxdt=h_n(\lambda), n=1,2,3,\ldots \qquad (6)$$

где

$$G_n(\tau,x,\lambda)=\frac{z_n(x)}{\lambda_n}\left\{\sin\lambda_n(T-\tau)+\lambda\int_\tau^T R_n(T,s,\lambda)\frac{1}{\lambda_n}\sin\lambda_n(s-\tau)ds\right\}, \qquad (7)$$

$$n=1,2,3,\ldots,$$

$$h_n(\lambda)=\xi_n-\psi_{1n}\left\{\cos\lambda_n T+\lambda\int_0^T R_n(T,s,\lambda)\cos\lambda_n s ds\right\}-$$
$$-\frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\left\{\sin\lambda_n T+\lambda\int_0^T R_n(T,s,\lambda)\sin\lambda_n s ds\right\}, n=1,2,3,\ldots \qquad (8)$$

Исследование разрешимости операторного уравнения (6)

Искомое оптимальное управление определяется как решение бесконечномерной системы нелинейных интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Для исследования разрешимости таких систем будем использовать операторные методы. С этой целью систему (6) перепишем в операторной форме

$$\int_0^T\int_0^1 G(t,x,\lambda)f\left[t,x,u(t,x)\right]dxdt=h(\lambda), n=1,2,3,\ldots, \qquad (9)$$

где

$$G(t,x,\lambda)=\left\{G_1(t,x,\lambda),\ldots,G_n(t,x,\lambda),\ldots\right\}, \qquad (10)$$

$$h(\lambda)=\{h_1(\lambda),\dots,h_n(\lambda),\dots\}. \tag{11}$$

Решение операторного уравнения (12) имеет вид

$$f\left[t,x,u(t,x)\right]=G^*(t,x,\lambda)\,N\left(h(\lambda)-\gamma\int_0^T\int_0^1 G(t,x,\lambda)\,dxdt\right)+\gamma. \tag{12}$$

Минимизация функционала

Таким образом, искомое оптимальное управление следует находить согласно соотношению (12).

1. Если $f\left[t,x,u(t,x)\right]\in H(Q)$ – монотонная функция по функциональной переменной $u(t,x)$, то

$$f_u\left[t,x,u(t,x)\right]\neq 0,\ \forall(t,x)\in Q. \tag{13}$$

Тогда соотношение (12) однозначно разрешается относительно переменной $u(t,x)$:

$$u(t,x)=\varphi\left(G^*(t,x,\lambda)\,N\left(h(\lambda)-\gamma\int_0^T\int_0^1 G(t,x,\lambda)\,dxdt\right)+\gamma\right)\equiv u(t,x,\gamma). \tag{14}$$

Теперь найденную функцию $u(t,x,\gamma)$ подставим в функционал (1) и имеем скалярную функцию

$$J\left[u(t,x,\gamma)\right]=\int_0^T\int_0^1 p\left[t,x,u(t,x,\gamma)\right]dxdt=\Phi(\gamma), \tag{15}$$

где $\gamma\in R$. Далее исследуем функцию $\Phi(\gamma)$ на экстремум. Решение этой задачи находим из соотношений

$$\begin{gathered}\Phi'(\gamma)=\beta\int_0^T\int_0^1 p_u\left[t,x,u(t,x,\gamma)\right]u_\gamma(t,x,\gamma)\,dxdt=0,\\ \Phi''(\gamma)=\beta\int_0^T\int_0^1\Big(p_{uu}\left[t,x,u(t,x,\gamma)\right]\left(u_\gamma(t,x,\gamma)\right)^2+\\ +p_u\left[t,x,u(t,x,\gamma)\right]u_{\gamma\gamma}(t,x,\gamma)\,dxdt\Big)>0.\end{gathered} \tag{16}$$

Задача (16) может иметь одно или несколько решений.

1 случай: пусть задача (16) имеет единственное решение $\gamma=\gamma^0$. Тогда согласно (14) искомое управление $u^0(t,x)$ находим по формуле

$$u^0(t,x)=u(t,x,\gamma^0), \tag{15}$$

на котором функционал достигает минимального значения, т. е.

$$J\left[u^0(t,x)\right]=J\left[u(t,x,\gamma^0)\right]\leq J\left[u(t,x,\gamma)\right],\ \forall\gamma\in R. \tag{16}$$

2 случай: пусть задача (16) имеет несколько решений $\gamma_1^0,\dots,\gamma_m^0$, где m натуральное число. В этом случае имеем несколько управлений

$$u_1^0(t,x)=u(t,x,\gamma_1^0),\dots,\quad u_m^0(t,x)=u(t,x,\gamma_m^0). \tag{17}$$

Вычислим значение функционала (1), соответствующее управлению $u\left(t,x,\gamma_k^0\right)$.

$$J\left[u_k^0\left(t,x\right)\right]=J\left[u\left(t,x,\gamma_k^0\right)\right],\ k=1,\ldots,m. \tag{18}$$

Далее из решения задачи

$$J\left[u^0\left(t,x\right)\right]=m\left\{J\left[u_1^0\left(t,x\right)\right],\ldots,J\left[u_m^0\left(t,x\right)\right]\right\} \tag{19}$$

находим $u^0\left(t,x\right)$. В этом случае $u^0\left(t,x\right)$ является оптимальным управлением. Оно может быть единственным, если $J\left[u\left(t,x,\gamma_k\right)\right]$ принимает различные значения, в противном случае оптимальными могут быть несколько управлений, на которых функционал $J\left[u\left(t,x,\gamma_k\right)\right]$ принимает одно и тоже значение, т. е.

$$J\left[u^0\left(t,x\right)\right]=J\left[u_i^0\left(t,x\right)\right],\ i=1,2,\ldots,r\le m. \tag{20}$$

2. $f\left[t,x,u\left(t,x\right)\right]\in H\left(Q\right)$ не монотонная по функциональной переменной $u\left(t,x\right)$, то условие (13) не выполняется и имеет место соотношение

$$f_u\left[t,x,u\left(t,x\right)\right]=0. \tag{21}$$

В этом случае уравнение (14), может иметь несколько решений

$$u_k\left(t,x\right)=u_k\left(t,x,\gamma\right)\ k=1,2,3,\ldots,r,\gamma\in\boldsymbol{R}, \tag{22}$$

где r – любое натуральное число.

Теперь найденную функцию $u_k\left(t,x,\gamma\right)$ подставим в функционал (1) и имеем скалярные функции

$$J\left[u_k\left(t,x,\gamma\right)\right]=\int_0^T\int_0^1 p\left[t,x,u_k\left(t,x,\gamma\right)\right]dxdt=\Phi_k\left(\gamma\right), \tag{23}$$

где $k=1,2,\ldots m$. Далее функцию $\Phi_k\left(\gamma\right)$ исследуем на экстремум. Возможны случаи, т. е. когда экстремум достигается в одной точке или в нескольких точках.

По методике определения «оптимального» управления, изложенной для случая монотонности функции $f\left[t,x,u\left(t,x\right)\right]$, находим «оптимальное» управление $u_k^0\left(t,x,\gamma_k^0\right)$.

Далее, искомое оптимальное управление $u^0\left(t,x\right)$ находим из условия

$$J\left[u^0\left(t,x\right)\right]=m\left\{J\left[u_1^0\left(t,x\right)\right],\ldots,J\left[u_r^0\left(t,x\right)\right]\right\}. \tag{24}$$

Литература

1. *Верлань А.Ф.* Математическое моделирование непрерывных динамических систем / А.Ф. Верлань, С.С. Москалюк. – Киев: Наукова думка, 1988. – 288 с.
2. *Тихонов А.Н.* Математическое моделирование технологических процессов и метод обратных задач в машиностроении / А.Н. Тихонов, В.Д. Кальнер, В.Б. Гласко. – М.: Машиностроение, 1990. – 264 с.
3. *Тихонов А.Н.* Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1972. – 735 с.
4. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами / А.И. Егоров. – М.: Наука, 1978. – 500 с.

5. *Плотников В.И.* Энергетическое неравенство и свойство переопределенности системы собственных функции / В.И. Плотников // Изв. АН СССР. Серия Математика. – 1968. – Т. 32. – № 4. – С. 743–755.
6. *Краснов М.В.* Интегральные уравнения / М.В. Краснов. – М.: Наука, 1975. – 303 с.
7. *Люстерник Л.А.* Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: Наука, 1965. –520 с.

А. Керимбеков, А.Т. Эрмекбаева
(Кыргызстан)

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СЛЕЖЕНИЯ ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ В СЛУЧАЕ ВЕКТОРНЫХ ПОДВИЖНЫХ ТОЧЕЧНЫХ УПРАВЛЕНИЙ

Аннотация. В статье исследована задача оптимального управления тепловыми процессами, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями в случае, когда распространение тепла происходит под действием точечных подвижных источников. При этом функция внешнего воздействия нелинейно зависит от управления. Качество управления оценивается обобщенным квадратичным функционалом. Доказана сходимость их приближений по управлению, оптимальному процессу и функционалу по норме соответствующих функциональных пространств.

Ключевые слова: тепловой процесс; функционал; оптимальное управление; нелинейное интегральное уравнение; приближенное решение; сходимость.

Математическая формализация задачи слежения при оптимальном управлении тепловым процессом сводится к нахождению наименьшего значения обобщенного квадратичного функционала [2]

$$J\left[u_1(t),\dots,u_m(t)\right] = \int_0^T\int_0^1 [V(t,x)-\xi(t,x)]^2\,dxdt + \beta\int_0^T\sum_{k=1}^m p_k^2\left[u_k(t)\right]dt,\ \ \beta>0 \qquad (1)$$

на множестве решений краевой задачи [1]

$$\begin{gathered} V_t = V_{xx} + \lambda\int_0^T K(t,\tau)V(\tau,x)\,d\tau + \\ + \sum_{k=1}^m g_k(x)\,\delta\big(x-x_k(t)\big)\,f_k\left[u_k(t)\right]dt, 0<x<1, 0<t\le T, \end{gathered} \qquad (2)$$

$$V(0,x) = \psi(x), x\in(0,1), \qquad (3)$$

$$V_x(t,0) = 0,\ \ v_x(t,1)+\alpha v(t,1) = 0, 0<t\le T, \qquad (4)$$

где

$$\xi(t,x)\in H(Q_r),\ \ Q_r = (0,1)\times(0,T),\ \ g_k(x)\in H(0,1),\ \ \psi(x)\in H_1(0,1),$$

$K(t,\tau) \in H(D), D = \{0 \le t, \tau \le T\}$ – заданные функции; $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, $x_k(t)$ – заданные функции, описывающие закон движения точек приложения внешних источников, областью значения которых является отрезок $[0,1]$; функции $f_k[u_k(t)] \in H(0,T)$; $p_k[u_k(t)] \in H(0,T)$ при $u_k(t) \in H(0,T)$, причем обладают свойством монотонности, то есть

$$f_{ku_k}[u_k(t)] \ne 0,\ p_{ku_k}[u_k(t)] \ne 0, \forall t \in [0,T]; \tag{5}$$

λ – параметр, T – фиксированный момент времени; $H(Y)$ – гильбертово пространство квадратично суммируемых функций, определенных на множестве Y.

Определение. Задачи управления, где процессом следует управлять так, чтобы отклонение состояния управляемого процесса мало отличалось от заданной траектории в течение всего времени управления, называются задачами слежения.

Построим приближения, соответствующие приближениям оптимального управления:

$$u^0(t) - u^{(n)}(t)^2_{H^m(0,T)} \le \varphi_k^0(\beta)\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\omega\left[\sigma^{(0)}(t)\right]^2_{H^m(0,T)} \underset{n\to\infty}{\to}. \tag{6}$$

Приближения, соответствующие приближениям оптимального процесса

1) $j-$е приближение оптимального процесса и их сходимость:

$$V^j(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda\int_0^T R_n^j(t,s,\lambda)a_n^0(s)ds + a_n^0(t)\right)z_n(x); \tag{7}$$

$$V^0(t,x) - V^j(t,x)^2_{H(Q)} \le$$

$$\le \frac{\lambda^2 K_0 T}{2\lambda_n^2}\left[|\lambda|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_1^2}}\right]^{2j}\left(1-\frac{1}{\ln|\lambda|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_1^2}}}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}\int_0^T a_n^2(s)ds \le \frac{\lambda^2 K_0 T}{2}\left(1-\frac{1}{\ln|\lambda|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_1^2}}}\right)^2 \times$$

$$\times\left[\|\psi(x)\|^2_{H(0,1)} + \frac{2mT}{\lambda_1^2}\left(g_k^0\right)^2 u^0(t)^2_{H^m(0,T)}\right]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^4}\left(|\lambda|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_1^2}}\right)^{2j} = \overline{C}(\lambda)\left(|\lambda|\sqrt{\frac{K_0T}{2\lambda_1^2}}\right)^j \underset{j\to\infty}{\to} 0;$$

2) $(j,q)-$е приближения оптимального процесса и их сходимость

$$V_q^j(t,x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda\int_0^T R_n^j(t,s,\lambda)a_n^{(q)}(s)ds + a_n^{(q)}(t)\right)z_n(x), \tag{8}$$

где

$$a_n^q(s) = \left|e^{-\lambda_n^2 t}\psi_n + \int_0^t e^{-\lambda_n^2(t-\tau)}\sum_{k=1}^{m} g_k\left[x_k(\tau)\right]z_n\left[x_k(\tau)\right]f_k\left[u_k^q(\tau)\right]d\tau\right|, \tag{9}$$

$$V^j(t,x) - V_q^j(t,x)^2_{H(Q)} \le$$

$$\le 2\int_0^T \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \lambda \int_0^T \left(R_n^j(t,s,\lambda) \right)^2 ds \int_0^T \left[a_n^0(s)ds - a_n^{(q)}(s) \right]^2 ds + \left[a_n^0(t) - a_n^{(q)}(t) \right]^2 \right\} dt.$$

3) (j, q, r)-е приближение оптимального процесса и их сходимость:

$$V_q^{j,r}(t,x) = \sum_{n=1}^{r} \left(\lambda \int_0^T R_n^j(t,s,\lambda) a_n^{(q)}(s) + a_n^{(q)}(t) \right) z_n(x), \tag{10}$$

$$V_q^{j,r}(t,x) \le 2\sum_{n=r+1}^{\infty} \left(1 + \frac{\lambda^2 K_0 T}{\left(\sqrt{2\lambda_n^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T} \right)^2} \right)^2 \int_0^T \left[a_n^{(q)}(t) \right]^2 dt \le$$

$$\le 2 \left(1 + \frac{\lambda^2 K_0 T}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T} \right)^2} \right)^2 \times \tag{11}$$

$$\times \left\{ \| \psi(x) \|^2_{H(0,1)} + \frac{2\mathrm{Tm}}{\lambda_1^2} \left(g_k^o \right)^2 \sum_{k=1}^{m} u_k^{(q)}(t)^2_{H(0,T)} \right\} \sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \le \widetilde{C} \frac{r+1}{r} \underset{r\to\infty}{\to} 0,$$

где

$$\widetilde{C} = 2 \left(1 + \frac{\lambda^2 K_0 T}{\left(\sqrt{2\lambda_1^2} - |\lambda| \sqrt{K_0 T} \right)^2} \right) \left\{ \| \psi(x) \|^2_{H(0,1)} + \frac{2Tm}{\lambda_1^2} \left(g_k^o \right)^2 \| f\left[u_k^{(q)}(t) \right] \|^2_{H^m(0,T)} \right\}.$$

Сходимость конечномерного приближения

$$V^0(t,x) - V_q^{j,r}(t,x)_{H(Q)} \le V^0(t,x) - V^j(t,x)_{H(Q)} +$$

$$+ \ V^j(t,x) - V_q^j(t,x)_{H(Q)} + V_q^j(t,x) - V_q^{j,r}(t,x)_{H(Q)} \underset{j\to\infty}{\to} 0.$$

Построим различные приближения минимального значения функционала.
Сходимость j-го приближения:

$$\left| J\left[u^0(t) \right] - J^j\left[u^0(t) \right] \right| \le C_j V^0(t,x) - V^j(t,x)_{H(Q)} \underset{j\to\infty}{\to} 0.$$

Сходимость (j,q)-го приближения:

$$\left| J^j\left[u^0(t) \right] - J_q^j\left[u^{(q)}(t) \right] \right| C_j^q V^j(t,x) - V_q^j(t,x)_{H(Q)}$$

$$+\beta p_j^0 \sum_{k=1}^{m} \| p_k\left[u_k^0(t) \right] - p_k\left[u_k^{(q)}(t) \right] \|_{H(Q)} \underset{j,q\to 0}{\to} 0.$$

Сходимость конечномерного (j,q,r)-го приближения:

$$\left|J_q^j\left[u^{(q)}\right]-J_q^{j,r}\left[u^{(q)}\right]\right|\le$$
$$\le V_q^j(t,x)+V_q^{j,r}(t,x)-2\xi(t,x)_{H(Q)}V_q^j(t,x)\ \ -V_q^{j,r}(t,x)_{H(Q)}\underset{r\to 0}{\to}0.$$

Сходимость конечномерного приближения к минимальному значению функционала

$$\left|J\left[u^0(t)\right]-J_q^{j,r}\left[u^{(q)}(t)\right]\right|\le\left|J\left[u^0(t)\right]-J_q^j\left[u^0(t)\right]\right|+\left|J^j\left[u^0(t)\right]-J_q^j\left[u^{(q)}(t)\right]\right|+$$
$$+\left|J_q^j\left[u^{(q)}(t)\right]-J_q^{j,r}\left[u^{(q)}(t)\right]\right|\xrightarrow[j,q,r\to 0]{}0.$$

Литература

1. *Керимбеков А.* Нелинейное оптимальное управление колебаниями в линиях передач / А. Керимбеков. – Бишкек: Изд-во КРСУ, 2008. – 132 с.
2. *Керимбеков А.* Приближенное решение задачи нелинейной оптимизации при подвижном точечном управлении тепловым процессом / А. Керимбеков, А.Т. Эрмекбаева // Вестник КРСУ. – 2018. – Т. 18. – № 8. – С. 10–15.
3. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики / В.И. Смирнов. Т. 1. – М.: Наука, 1974. – 480 с.
4. *Краснов М.В.* Интегральные уравнения / М.В. Краснов. – М.: Наука, 1975. – 304 с.

А. Керимбеков, К.Р. Карабакиров
(Кыргызстан)

ПРИБЛИЖЕННОЕ ТОЧЕЧНОЕ НЕЛИНЕЙНОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫМ ПРОЦЕССОМ ПРИ МИНИМИЗАЦИИ КВАДРАТИЧНОГО ФУНКЦИОНАЛА

Аннотация. В данной статье рассматривается задача точечного подвижного нелинейного оптимального управления колебательным процессом при минимизации квадратичного функционала и исследуется сходимость приближений оптимального управления, оптимального процесса и минимального значения функционала.

Ключевые слова: нелинейная оптимизация; обобщенное решение; точечное управление; краевая задача; минимизация функционала.

Рассмотрим краевую задачу.

$$V_{tt}=V_{xx}+g(t,x)\delta\left[x-x_0(t)\right]f\left[t,\,u(t)\right],\quad 0<x<1,\quad 0<t\le T\,,$$
$$V(0,x)=\psi_1(x),\quad V_t(0,x)=\psi_2(x),\qquad 0<x<1, \tag{1}$$
$$V_x(t,0)=0,\quad V_x(t,1)+\alpha V(t,1)=0,\quad 0<t\le T,\quad \alpha>0\,,$$

на множестве решений которой требуется минимизировать функционал

$$J\left[u(t)\right]=\int_0^1\left[V(T,x)-\xi(x)\right]^2dx+\beta\int_0^T u^2(t)dt;\quad \beta>0, \tag{2}$$

где $u(t)$ – функция управления, являющаяся элементом пространства Гильберта $H(0,1)$; $\alpha > 0$ – коэффициент упругости закрепления правой границы управляемого объекта; функции $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ и $\xi(x)$ являются элементами пространства Гильберта $H(0,1)$; нелинейная функция внешнего источника $f\left[t,\ u(t)\right]$ является монотонной по переменной функции $u(t)$ для всех значений $t \in [0,T]$.

Показано, что обобщённым решением краевой задачи (1) является функция

$$V\left(t,\ x\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\psi_{1n} cos\lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n}\psi_{2n} sin\lambda_n t + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\lambda_n}\int_0^t sin\lambda_n\left(t-\tau\right) g\left(\tau, x_0\right) z_n[x_0(\tau)] f\left[\tau,\ u\left(\tau\right)\right] d\tau \right] z_n\left(x\right),$$

где

$$z_n(x) = \sqrt{\frac{2\left(\lambda_n^2 + \alpha^2\right)}{\lambda_n^2 + \alpha^2 + \alpha}}\cos\lambda_n x, \quad z_n[x_0(t)] = \sqrt{\frac{2\left(\lambda_n^2 + \alpha^2\right)}{\lambda_n^2 + \alpha^2 + \alpha}}\cos\lambda_n x_0(t). \tag{3}$$

По разработанной методике [1] оптимальное управление $u^0(t)$, на котором квадратичный функционал (2) принимает свое наименьшее значение, определено как решение следующего нелинейного интегрального уравнения:

$$\beta u(t) f_u^{-1}[t,u(t)] + \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t, x_0(t)) \int_0^T G_n(\tau, x_0(\tau)) f[\tau, u(\tau)] d\tau = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t, x_0(t)) h_n, \tag{4}$$

где

$$G_n(t, x_0(t)) = \frac{g\left(t,\ x_0(t)\right) z_n[x_0(t)]}{\lambda_n}\sin\lambda_n(T-t),\ \ h_n = \xi_n - \psi_{1n}\cos\lambda_n T - \frac{\psi_{2n}}{\lambda_n}\sin\lambda_n T,$$

и показано, что оно удовлетворяет следующему неравенству:

$$f_u[t,u(t)]\left(u(t)\cdot f_u^{-1}[t,u(t)]\right)_u > 0. \tag{5}$$

Согласно методике [2], введём обозначение

$$\beta u(t) f_u^{-1}[t,u(t)] = p(t). \tag{6}$$

Отсюда, с учетом условия (5), однозначно определяется управление $u(t)$, т. е. существует такая функция $\varphi[\cdot]$, что

$$u(t) = \varphi[t, p(t), \beta]. \tag{7}$$

С учётом этого, рассматривается следующее нелинейное интегральное уравнение:

$$p(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G_n\left[t, x_0(t)\right] \int_0^T G_n\left[\tau, x_0(\tau)\right] f\left(\tau, \theta[\tau, p(\tau), \beta]\right) d\tau = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} G_n\left[t, x_0(t)\right] h_n. \tag{8}$$

Показано, что при условии выполнения следующих неравенств

$$1)\ \left\| f(u) - f(\bar{u}) \right\|_H \le f_0 \left\| u - \bar{u} \right\|_H, \quad f_0 > 0,$$

$$2)\ \left\| \varphi[t, p(t), \beta] - \varphi[t, \bar{p}(t), \beta] \right\|_H \le \varphi_0(\beta) \left\| p(t) - \bar{p}(t) \right\|_H, \quad \varphi_0(\beta) > 0,$$

$$3)\ \gamma = 2T\left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) \left\| g(t,x) \right\|_H^2 f_0 \varphi_0(\beta) < 1$$

уравнение (8) имеет единственное решение [3], приближения которого найдены по методу последовательных приближений:

$$p_k(t) = G\left[p_{k-1}(t) \right], \tag{9}$$

где

$$G[p(t)] = \sum_{n=1}^{\infty} G_n(t, x_0(t)) \left[h_n - \int_0^T G_n(\tau, x_0(\tau)) f\left(\tau, \theta[\tau, p(\tau), \beta]\right) d\tau \right],$$

причем для функций $p_0(t)$ – элемента гильбертова пространства $H(0,T)$ и $p^0(t)$ – точного решения уравнения (8) справедлива следующая оценка:

$$\left\| p^0(t) - p_k(t) \right\|_H \le \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \left\| G\left[p_0(t) \right] \right\|_H. \tag{10}$$

С учетом (7) найдены оптимальное управление $u^0(t)$ и его n-е приближение $u_n(t)$, для которых справедлива оценка

$$\left\| u^0(t) - u_k(t) \right\|_H \le \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \left\| G\left[p_0(t) \right] - p_0(t) \right\|_H. \tag{11}$$

С учетом (3) и найденных управлений $u^0(t)$ и $u_k(t)$ найдены оптимальный процесс $V^0(t,x)$ и его k-е приближение $V_k(t,x)$, для которых справедлива оценка

$$\left\| V^0(t,x) - V_k(t,x) \right\|_H \le T \cdot \left(2\left[\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right] \right)^{\frac{1}{2}} f_0 \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \left\| G\left[p_0(t) \right] - p_0(t) \right\|_H. \tag{12}$$

Далее, с учетом найденных $u^0(t)$, $V^0(t,x)$ и их k-х приближений $u_k(t)$, $V_k(t,x)$, найдены минимальное значение $J[u^0(t)]$ функционала (2) и его приближение, для которых справедлива оценка

$$\left| J\left[u^0 \right] - J\left[u_k \right] \right| \le \left[C_1 \left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{6} \right) + \beta C_2 \right] \varphi_0(\beta) \frac{\gamma^k}{1-\gamma} \left\| G\left[p_0(t) \right] - p_0(t) \right\|_H, \tag{13}$$

где

$$C_1 = \left\| V^0(T,x) + V_k(T,\ x) - 2\xi(x) \right\|_{H(0,1)}, \ C_2 = \left\| u^0(t) + u_k(t) \right\|_{H(0,T)}.$$

Литература

1. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами / А.И. Егоров. – М.: Наука, 1978. – 464 с.

2. *Керимбеков А.К.* Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами: дис. …д-ра физ.-мат. наук / А.К. Керимбеков. – Бишкек, 2003.
3. *Люстерник Л.А.* Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М.: Наука, 1965. – 520 с.

А. Керимбеков, А.К. Баетов, Ж.К. Асанова
(Кыргызстан)

ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ, ОПИСЫВАЕМЫХ СИСТЕМОЙ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. Как было показано выше, многие прикладные задачи описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями или их системой и содержат некоторые параметры задачи. При исследовании задач спектральной теории немаловажную роль играют значения параметров задачи, в частности от их значения могут зависеть существования решения задачи в целом. Учитывая это обстоятельство нами был разработан метод, позволяющий находить решения нелинейной спектральной задачи в случае, когда процесс описывается почти линейными дифференциальными уравнениями, содержащими один или несколько параметров.

Ключевые слова: спектральная теория уравнения с параметром; разрешимость; класс решений; достаточные условия.

Рассмотрим систему уравнений вида

$$\dot{x} = Ax + \lambda f(x), \tag{1}$$

где $x = x(t) = \{x_1(t),\dots,x_n(t)\} - n$ – мерный вектор – функция,

А – матрица порядка $n * n, f(x) = \{f_1(x(t)),\dots,f_n(x(t))\}$ – n – мерная заданная вектор функция, λ – параметр.

Пусть вместе с системой (1) задано начальное условие

$$x(t_0) = x^0. \tag{2}$$

Для построения решения уравнения (1) рассмотрим однородную систему уравнений

$$\dot{x} = Ax. \tag{3}$$

Из фундаментальных систем решений этого уравнения составим фундаментальную матрицу решений $\Phi(t) = \{x^{(1)}(t),\dots,x^{(n)}(t)\}$.

Далее образуем матрицу Коши

$$\Phi(t,\tau) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau) \tag{4}$$

и решение задачи Коши определим по формуле

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x^0 + \lambda\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)f(x(\tau))d\tau. \tag{5}$$

Теперь, введя оператор

$$B(x) = x(t) = \lambda\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)\, f\left(x(\tau)\right)d\tau + \Phi(t,t_0)\, x^0,$$

уравнение (5) перепишем в операторной форме

$$x = B(x). \tag{6}$$

Теперь исследуем вопросы однозначной разрешимости операторного уравнения (6). Справедливы следующие утверждения.

Теорема. Пусть функция $f\left(x(t)\right)$ является непрерывной функцией по функциональному аргументу $x(t)$ и удовлетворяет условию Липщица

$$\left|f\left(x(t)\right) - f\left(y(t)\right)\right| \le L\left|x(t) - y(t)\right|,\ L > 0,\ \text{для любого } t \in \left[t_0, T\right].$$

Тогда при всех значениях параметра λ, удовлетворяющих условию $|\lambda| < \dfrac{1}{\varPhi_0 L}$, где

$\varPhi_0$ и L – положительные постоянные. Операторное уравнение (6) имеет в пространстве непрерывных функций $C_{[t_0,T]}$ единственное непрерывное решение.

Доказательство. Известно, что бесконечномерное пространство непрерывных функций $C_{[t_0,T]}$ с метрикой

$$\rho\left(x(t), y(t)\right) = max\left|x(t) - y(t)\right|,\ a \le t \le b$$

является полным метрическим пространством. Не трудно показать, что в условиях теоремы оператор $B(x)$ отображает пространство $C_{[t_0,T]}$ в себя, то есть имеет место соотношение

$$B : C_{[t_0,T]} \to C_{[t_0,T]}. \tag{7}$$

Теперь покажем, что в условиях теоремы оператор $B(x)$ является сжимающим оператором. Это следует из неравенства

$$\rho\left(B(x), B(y)\right) = max\left|B(x) - B(y)\right| =$$

$$= max\left|\lambda\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)\, f\left(x(\tau)\right)d\tau - \lambda\int_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)\, f\left(y(\tau)\right)d\tau\right| \le max\left|\lambda\right|\Phi_0 L\left|x(t) - y(t)\right| * T =$$

$$= |\lambda|\Phi_0 L\rho(x, y),$$

где $\Phi_0 = \max\limits_{0\le t\tau\le T}\left|\Phi(t,\tau)\right|$, L – постоянная Липшица. Отсюда в силу условия $|\lambda|\Phi_0 L < 1$ следует, что оператор $B(x)$ является сжимающим. Поскольку пространство $C_{[t_0,T]}$ является полным метрическим пространством, а оператор $B(x)$ является сжимающим оператором, отображающим пространство $C_{[t_0,T]}$ в себя, то, согласно известному принципу сжимающих отображений (ПСО), операторное уравнение имеет единственную неподвижную точку $\overline{x}(t)$, которая удовлетворяет соотношению

$$\overline{x}(t) = B\overline{x}(t).$$

Это решение определяется методом последовательных приближений по формуле

$$x_n(t) = Bx_{n-1}(t), \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

где нулевое приближение $x_0(t)$ является произвольным элементом пространство $C_{[t_0,T]}$.

Также известно, что при этом между точным решением $\bar{x}(t)$ и его n-ными приближениями имеет место соотношение

$$\bar{x}(t) - x_n(t)_{C_{[t_0,T]}} \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha} Bx_0(t)_{C_{[t_0,T]}} \overline{n \to \infty}, \text{ при } n \to \infty,$$

где $\alpha = |\lambda| \Phi_0 L < 1$.

Вывод. Таким образом, задачи Коши (1), (2) с уравнением, содержащие параметр λ, имеют единственное решение при каждом значении λ, удовлетворяющее неравенству $|\lambda| < \dfrac{1}{\Phi L}$.

Литература

1. *Садовничий В.А.* Теория операторов: учебник для вузов с углубленным изучением математики / В.А. Садовничий. 5-е изд., стереотип. – М., 2004. – 384 с.
2. *Люстерник Л.А.* Элементы функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И. Соболев. – М., 1965. – 520 с.
3. *Kerimbekov A., Abdyldaeva E., Asanova Zh., Uraliev A.* On the Solvability of Nonlinear Integral Equations // AIP Conference Proceedings 2325, 020024 (2021).
4. *Тихонов А.Н.* Дифференциальные уравнения: учеб. для вузов: в 2 т. / А.Н. Тихонов, А.Б. Васильева, А.Г. Свешников. 4-е изд. – М., 2005. – 256 с.

В.И. Максимов
(Российская Федерация)

ОБ УПРАВЛЕНИИ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ПАРАБОЛИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЕМ С ПАМЯТЬЮ

Аннотация. Рассматривается задача управления по принципу обратной связи нелинейным распределенным уравнением с памятью. В предположении, что уравнение подвержено влиянию неизвестного динамического возмущения указывается алгоритм ее решения, который основан на конструкциях теории позиционных дифференциальных игр.

Ключевые слова: управление с обратной связью; распределенное уравнение.

Введение. Рассмотрим распределенное дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} x(v,t) - x(v,t) + e^{-\eta t} R\left(e^{\eta t} x(v,t)\right) + \eta x(v,t) + \alpha\left(K_\eta(t) x_{0,t}(\cdot)\right)(v) = \\ = u(v,t) - v(v,t) + f(v,t) в Q_v\, \partial_\mu x(v,t) = 0 в_v\, x(v,0) = x_0(v) в. \tag{1}$$

Здесь

$$R(y) = k(y - y_1)(y - y_2)(y - y_3), \ \ \alpha, k > 0, \eta$$

и $y_1 < y_2 < y_3 -$ действительные числа, $\Omega \subset R^n -$ ограниченное открытое множество с липшицевой границей, $n \in [1:3]$, $\vartheta > 0$ – конечный момент времени, $Q_\vartheta = \Omega \times T, T = [0, \vartheta]$, $\Sigma_\vartheta = \partial\Omega \times T$, $f(\cdot) \in L_\infty(T; H^1(\Omega))$ – заданная функция, $u -$ управление, v – возмущение, μ и $\partial_\mu -$ вектор единичной внешней нормали и производная по внешней нормали к границе $\partial\Omega$ области Ω, $(K_\eta(t)y_{0,t}(\cdot))(v) = \gamma \int_0^t e^{-(\beta+\eta)(t-s)} y(v,s)ds$ при п.в.v Ω, β и $\gamma -$ действительные числа, $x_{0,t}(\cdot)$ означает функцию $x(s)$, $s \in [0,t]$, $x_0 \in L_\infty(\Omega)$. Функция $x(\cdot) = x(;0, x_0, u(\cdot), v(\cdot)) \in W(0,\vartheta) \cap L_\infty(Q_\vartheta)$ называется решением (слабым) уравнения (1), если выполняется равенство

$$\int_0^\vartheta \langle \dot{x}(t), \varphi(t) \rangle dt +$$
$$+\int_0^\vartheta \int_\Omega \left\{ \nabla x(v,t) \nabla \varphi(v,t) + \left[e^{-\eta t} R\left(e^{\eta t} x(v,t)\right) + \eta x(v,t) \right] \varphi(v,t) \right\} dv dt +$$
$$+\int_0^\vartheta \int_\Omega \alpha \left(K_\eta(t) x_{0,t}(\cdot)\right)(v) \varphi(v,t) dv dt = \int_0^\vartheta \int_\Omega \{u(v,t) - v(v,t)\} \varphi(v,t) dv dt$$

(при всех $\varphi \in W(0,\vartheta)$), причем $x(0) = x_0$. Здесь $\langle , \rangle$ – двойственность между $H^1(\Omega)$ и $(H^1\Omega)^*, W(0,\vartheta) = \{y(\cdot) \in L_2(T; H^1(\Omega)) : \dot{y}(\cdot) \in L_2(T; H^1(\Omega))^*)\}$.

Задача гарантированного управления такова. В $H^1(\Omega)$ заданы два ограниченных замкнутых множества P и Q. Имеется критерий качества

$I(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_0^\vartheta \phi(t, x(t), u(t))dt + \sigma(x(\vartheta))$, Здесь $\phi(\cdot) : T \times H^1(\Omega))^* \times H \to R$ и $\sigma : H \to R$. Задано предписанное значение критерия качества I_*. В моменты $\tau_i \in Д = \{\tau_i\}_{i=0}^m$, $\tau_0 = 0$, $\tau_{i+1} = \tau_i + \delta$, $\tau_m = \vartheta$ измеряются $x(\tau_i)$. Результаты измерений – функции $\xi_i^h \in (H^1(\Omega))^*$, $i \in [1:m], (\xi_0^h = x_0)$, такие, что $\left|x(\tau_i) - \xi_i^h\right|_{(H^1(\Omega))^*} \le h,$ где

$h \in (0,1) -$ ошибка измерения. Необходимо указать такой закон U формирования управления u (со значениями в P) на основе неточных измерений $x(\tau_i)$, что каково бы ни было $\varepsilon > 0$ решение уравнения (1) $x_Д^h(\cdot) = x(;;0, x_0, u^h(\cdot), v(\cdot))$ удовлетворяет неравенству

$$\left| I\left(x_Д^h(\cdot), u^h(\cdot)\right) - I_* \right| \le \varepsilon, \tag{2}$$

для любых $h \in (0, h_*(\varepsilon)), \delta \in (0, \delta_*(\varepsilon))$ и $\xi_i^h \in (H^1(\Omega))^*, \left|\xi_i^h - x_\Delta^h(\tau_i)\right|_{(H^1(\Omega))^*} \le h$.

Условие 1.

а) $\max\{3|c_R|, 3|a|\vartheta^{1/2}, 0.5 - \beta\} \le \eta$, где $c_R \le dR/dy$ при всех $y \in R, L$ – постоянная Липшица функции ϕ.

б) Существует замкнутое множество $D \subset H^1(\Omega)$ такое, что $P = Q + D$.

в) Существует управление

$$u^*(\cdot) \in D(\cdot) = \left\{u(\cdot) \in L_2(T; H^1(\Omega)) : u(t) \in D \text{ при п.в.t } t \in \right\}$$

такое, $p(\vartheta) + \sigma(\omega(\vartheta)) = I_*$. Здесь $\mathrm{p(t)}$ – решение уравнения $\dot{p}(t) = \phi(t, w(t), u^*(t)) p(0) = 0$, а $w(\cdot) = w(;;0, x_0, u^*(\cdot))$ – решение уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} w(v,t) - \Delta w(v,t) + e^{-\eta t} R\left(e^{\eta t} w(v,t)\right) + \eta w(v,t) + \alpha\left(K_\eta(t) w_{0,t}(\cdot)\right)(v) =$$
$$= u^*(v,t) + f(v,t) \text{ в } Q_\vartheta,\ \partial_\mu w(v,t) = 0 \text{ в } \Sigma_\vartheta,\ w(v,0) = x_0(v) \text{ в } \Omega.$$

Наряду с уравнением (1) рассмотрим также дифференциальное уравнение

$$\dot{g}(t) = \phi\left(t, x(t), u(t)\right),\ g(0) = 0. \tag{3}$$

Закон формирования управления U определим следующим образом:

$$U(t,x,g) = \left\{u^e \in P : x - w(t), u^e + \left(g - p(t)\right)\phi\left(t, w(t), u^e\right) \le \right.$$
$$\left. \le i\left\{\langle x - w(t), u\rangle + \left(g - p(t)\right)\phi\left(t, w(t), u\right) : u \in P\right\}\right\} + h, \text{ если } t > 0. \tag{4}$$

Перейдем к описанию алгоритма решения задачи. До начала его работы фиксируем $h \in (0,1)$, а также разбиение $Д = \{\tau_i\}_{i=0}^m$ интервала T с шагом $\delta = \tau_{i+1} - \tau_i$. Работа алгоритма разбивается на $m-1$ однотипных шагов. На полуинтервале $[0, \tau_1)$ полагаем

$$u^h(t) = u_0^h \in P. \tag{5}$$

В результате действия этого управления, а также неизвестного возмущения $v_{0,\tau_1}(\cdot)$ реализуются $\left\{x_Д^h(\cdot), g_Д^h(\cdot)\right\}_{0,\tau_1} = \left\{x\left(\cdot; 0, x_0, u_{0,\tau_1}^h(\cdot), v_{0,\tau_1}(\cdot)\right), g\left(\cdot; 0, 0, u_{0,\tau_1}^h(\cdot)\right)\right\}_{0,\tau_1}$ решения (1), а также (3) на промежутке $[0, \tau_1]$.

Пусть решения $x_Д^h(\cdot)$ и $g_Д^h(\cdot)$ (3) определены на интервале $[0, \tau_i], \mathrm{i} > 0$. В момент $t = \tau_i$ вычислим

$$u_i^h \in U\left(\tau_i, \xi_i^h, g_\Delta^h(\tau_i)\right),\ \left|\xi_i^h - x_\Delta^h(\tau_i)\right|_{\left(H^1(\Omega)\right)^*} \le h$$

и положим $u^h(t) = u_i^h$ при $t \in [\tau_i, \tau_{i+1})$. В результате действия этого управления и неизвестного возмущения $v_{\tau_i,\tau_{i+1}}(\cdot)$ реализуются

$$\left\{x_Д^h(\cdot), g_Д^h(\cdot)\right\}_{\tau_i,\tau_{i+1}} = \left\{x_Д^h\left(\cdot; \tau_i, x_Д^h(\tau_i), u_{\tau_i,\tau_{i+1}}^h(\cdot), v_{\tau_i,\tau_{i+1}}(\cdot)\right), g\left(\cdot; \tau_i, g_Д^h(\tau_i), u_{\tau_i,\tau_{i+1}}^h(\cdot)\right)\right\}_{\tau_i,\tau_{i+1}}$$

решения уравнений (1), а также (3) на промежутке $[\tau_i, \tau_{i+1}]$. Описанная выше процедура заканчивается в момент.

Теорема 1. Пусть управление $u^h(\cdot)$ находится по формулам (4)–(7). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такие $h_* = h_*(\varepsilon) \in (0,1)$ и $\delta_* = \delta_*(\varepsilon) \in (0,1)$, что при всех $h \in (0, h_*), \delta \in (0, \delta_*)$ справедливо неравенство (2).

Н.Н. Субботина, Е.А. Крупенников
(Российская Федерация)

О РАЗВИТИИ ВАРИАЦИОННОГО ПОДХОДА К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОЙ РЕКОНСТРУКЦИИ

Аннотация. Рассматривается задача динамической реконструкции для детерминированных аффинно-управляемых систем. Это задача восстановления в реальном времени всей траектории системы и управления, её породившего, по известным дискретным неточным замерам наблюдаемой траектории. Обсуждается вариационный подход к решению этой задачи, предложенный авторами доклада. Этот подход опирается на поиск стационарных точек интегральных функционалов невязки во вспомогательных вариационных задачах. Особенностью подхода является то, что интегралами функционалов являются d.c. функции. При этом решение задачи реконструкции сводится к интегрированию линейных гамильтоновых систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Обсуждается ряд модификаций метода, разработанного на основании вариационного подхода, в частности модификация, позволяющая строить аппроксимации искомого управления в форме допустимых кусочно-постоянных управлений, и модификации, обобщающие метод для других типов динамических систем.

Ключевые слова: задачи динамической реконструкции; вариационные задачи; d.c. функции; гамильтоновы системы.

Введение. Доклад посвящен обратным задачам теории управления. Обратные задачи встречаются во многих прикладных областях, таких как робототехника, навигация, авиастроение, медицина, экономика и др. Эти задачи состоят в реконструкции всей траектории управляемой системы и управления, её породившего, по результатам неточных дискретных наблюдений за движением системы. Существует множество современных подходов к обратным задачам. Некоторые из них опираются на метод наименьших квадратов [1], теорию групп Ли [2], методы градиентного типа [3], процедуры регуляризации некорректных задач [4] и другие методы. Отдельно выделим подход, опирающийся на процедуру оптимального прицеливания [5, 6], которая имеет истоки в работах школы по теории управления Н.Н. Красовского [7]. Обзор современных методов решения обратны задач представлен, например, в [8].

В докладе рассматривается задача динамической реконструкции. Рассматриваются детерминированные аффинно-управляемые системы. Допустимые управления – измеримые функции со значениями из известного выпуклого компакта. Задача реконструкции состоит в восстановлении динамики системы (траектории и управления, породившего эту траекторию) по неточным дискретным замерам наблюдаемой траектории. Замеры поступают в реальном времени с фиксированным шагом. Динамическая реконструкция производится также в реальном времени по мере поступления новых замеров. Заметим, что задача восстановления управления, породившего наблюдаемую траекторию, некорректна, так как одна и та же траектория может порождаться разными управлениями. Поэтому ставится задача о реконструкции единственного нормального управления, которое среди всех допустимых управлений, порождающих наблюдаемую траекторию, имеет минимальную норму в пространстве

Авторами данного доклада предложен оригинальный подход к решению задачи динамической реконструкции. Он опирается на вспомогательные задачи вариационного исчисления с интегральными функционалами невязки, регуляризированным по Тихонову [11]. Отличительной особенностью этого подхода является то, что во вспомогательных вариационных задачах рассматриваются невыпуклые (выпукло-вогнутые) функционалы, интегранты которых являются так называемыми d.c. функциями [12]. При этом ищутся лишь стационарные точки функционалов, а не их экстремали в вариационных задачах.

На основании этого подхода разработан и обоснован алгоритм [9], позволяющий строить аппроксимации решения задачи динамической реконструкции. Аппроксимации управлений при этом сходятся слабо со звездой к нормальному управлению, а порождаемые ими траектории сходятся равномерно к наблюдаемой. Алгоритм сводит задачу реконструкции к интегрированию линеаризованных гамильтоновых систем ОДУ.

Предложенный авторами подход находится в развитии. Для алгоритма, изложенного в [9], был разработан ряд модификаций, обобщающих подход на более общие случаи (по сравнению с материалом работ).

Разберем постановку задачи**.** Рассматривается динамическая аффинно-управляемая система

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) = G(t, x(t))u(t) + f(t, x(t)), t \in [0,T], T < \infty, \\ &x(\cdot) : [0,T] \to R^n, u(\cdot) : [0,T] \to R^m,\ m \geq n, \\ &G(\cdot) : [0,T] \times R^n \to R^{n\times m}, f(\cdot) : [0,T] \times R^n \to R^n, \end{aligned} \qquad (1),$$

где $u(\cdot)$ – вектор управлений, $x(\cdot)$ – вектор фазовых переменных (траектория). Допустимые управления – измеримые функции, удовлетворяющие геометрическим ограничениям

$$u(t) \in \boldsymbol{U} \text{ почти для всех } t \in [0,T], \qquad (2)$$

где $\boldsymbol{U} \subset R^m$ – выпуклый компакт.

Роль входных данных играют неточные замеры некоторой наблюдаемой траектории $x^*(\cdot) : [0,T] \to R^n$ системы (1), называемой базовой. Замеры имеют вид

$$\{y_i^\delta,\ i = 0,\ldots,N\},\ y_i^\delta - x^*(t_i) \leq \delta,\ t_i = ih^\delta,\ t_N = T, \qquad (3)$$

где δ – погрешность замеров, а h^δ – шаг измерения.

Показано [10], что при выполнении ряда достаточно общих условий существует единственное нормальное управление $u^*(\cdot) : [0,T] \to R^m$ – допустимое управление, породившее базовую траекторию и имеющее минимальную норму в пространстве L^2.

Задача динамической реконструкции ставится следующим образом: для полученных при определенных δ и h^δ наборов замеров $\{y_i^\delta\}$ (3) построить кусочно-непрерывные равномерно ограниченные управления $u^\delta(\cdot) : [0,T] \to R^m$ такие, что при стремлении к нулю параметров δ и h^δ эти управления сходятся слабо со звездой к нормальному управлению $u^*(\cdot)$, а траектории системы (1), порожденные этими управлениями, сходятся равномерно к базовой траектории $x^*(\cdot)$.

Модификации метода. В [9, 10] разработан и обоснован пошаговый алгоритм, позволяющий получить решение поставленной задачи динамической реконструкции при условии определенного согласования параметров δ и h^δ. Впоследствии был разработан ряд модификаций этого алгоритма.

1. Обобщение на случай $\mathrm{m} < n$ (размерность управлений меньше размерности фазовых переменных в динамике (1)).

Для работы алгоритма, опубликованного в [10], условие $m \geq n$ существенно. Для того, чтобы обойти его, предлагается регуляризация динамики (1), а именно: при выполнении определенных условий на ранг матрицы $\mathrm{G}(t,x)$ показано, что размерность n системы (1) можно сократить до размерности m, таким образом сведя случай $m < n$ к случаю $m = n$. При этом по-прежнему требуются замеры всех n координат. Этот материал планируется опубликовать в работе [13].

2. Обобщение на случай механических систем – систем, где фазовые переменные включают как координаты, так и скорости.

Для таких систем зачастую возникают две проблемы: то, что на практике, как правило, нет возможности получать замеры скорости напрямую, и нарушение условия $m \geq n$ (из-за того, что количество фазовых переменных удваивается в результате добавления скоростей к набору фазовых переменных). Первую проблему предлагается решать путем введения процедуры аппроксимации скоростей по замерам траектории, что влечет за собой усиление требований на согласование параметров δ и h^{δ}. Показано, что вторая проблема решается сведением исходной системы размерности 2n к системе размерности n. Этот материал планируется опубликовать в работе [14].

3. Переход от кусочно-непрерывных аппроксимаций нормального управления к кусочнопостоянным.

Одним из недостатков алгоритма, опубликованного в [10], является то, что полученные аппроксимации нормального управления хоть и равномерно (по параметрам δ и h^{δ}) ограничены, но не обязательно удовлетворяют геометрическим условиям на управления (2). Иначе говоря, они не являются допустимыми управлениями. Предлагается процедура интегрального усреднения полученных аппроксимаций, позволяющая получить кусочно-постоянные аппроксимации, которые удовлетворяют условию (2) и сходятся почти всюду к нормальному управлению. Этот материал планируется опубликовать в работе [15].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 20-01-00362).

Литература

1. *Ngoc D.V.* Dynamic model identification for industrial robots / Ngoc D.V., Marcelo H. Ang Jr. // Acta Polytechnica Hungarica. – 2009. – Vol. 6. – № 5. – P. 51–68.
2. *Liu Y.C.* A high-order Lie groups scheme for solving the recovery of external force in nonlinear system / Y.C. Liu, Y.W. Chen, Y.T. Wang, J.R. Chang// Inverse Problems in Science and Engineering. – 2018. – Vol. 26. – № 12. – P. 1749–1783.
3. *Kabanikhin S.I.* Identification of biological models described by systems of nonlinear differential equations / Kabanikhin S.I., Krivorotko O.I. // J. of Inverse and Ill-posed Problems. – 2015. – Vol. 23. – № 5. – P. 519–527.
4. *Schmitt U.* Efficient algorithms for the regularization of dynamic inverse problems: II. Applications / Schmitt U., Louis A.K., Wolters C., Vauhkonen M. // Inverse Problems. – 2002. – Vol. 18. – № 3. – P. 659–676.
5. *Осипов Ю.С.* Некоторые алгоритмы динамического восстановления входов / Ю.С. Осипов, А.В. Кряжимский, В.И. Максимов // Тр. ИММ УрО РАН. – 2011. – Т. 17 – № 1. – С. 129–161.
6. *Максимов В.И.* Динамический метод невязки в задаче реконструкции входа системы с запаздыванием в управлении / В.И. Максимов, М.С. Близорукова // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2021. – Т. 61:3. – С. 382–390.
7. *Красовский Н.Н.* Позиционные дифференциальные игры / Н.Н. Красовский, А.И. Субботин. – М.: Наука, 1974. – 456 с.
8. *Schuster N.* Dynamic inverse problems: modelling – regularization – numerics. Preface / Schuster N., Burger M., Hahn B. // Inverse Problems. – 2018. – Vol. 34. – P. 4.

9. *Субботина Н.Н.* Слабые со звездой аппроксимации решения задачи динамической реконструкции / Н.Н. Субботина, Е.А. Крупенников // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2021. – Т. 27. – № 2. – С. 208–220.
10. *Субботина Н.Н.* Слабое со звездой решение задачи динамической реконструкции / Н.Н. Субботина, Е.А. Крупенников // Тр. Математического института им. В.А. Стеклова РАН. – №315. – 2021. – С. 247–260.
11. *Тихонов А.Н.* Об устойчивости обратных задач / А.Н. Тихонов // Докл. АН СССР. – 1943. – Т. 39. – № 5. – С. 195–198.
12. *Стрекаловский А.С.* Элементы невыпуклой оптимизации / А.С. Стрекаловский. – Новосибирск: Наука, 2003. – 356 с.
13. *Subbotina N.N.* On Regularization of a Variational Approach to Solving Control Reconstruction Problems / Subbotina N.N., Krupennikov E.A. // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2022.
14. *Subbotina N.N.* On inverse problems for mechanical systems / Subbotina N.N., Krupennikov E.A. // AIP conference proceedings. – 2022.
15. *Subbotina N.N.* Variational approach to construction of piecewise-constant control approximations in the problem of dynamic reconstruction / Subbotina N.N., Krupennikov E.A. // Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. – 2022–2023.

А.С. Омуралиев
(Кыргызстан)

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЕМ

Аннотация. В статье была построена асимптотика решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления процессом описываемым параболическим уравнением, в случаи, когда управление входит в уравнение объекта. Предложенный в данной работе алгоритм упрощает структуру асимптотики решения поставленной задачи.

Ключевые слова: параболическое уравнение; задача оптимизации; оптимальное управление; асимптотика решения и его структура.

1.1 Введение

В работе [1] была построена асимптотика решения сингулярно возмущенной задачи оптимального управления параболическим уравнением, когда управление входило в граничное условие. Данная статья является продолжением работы [1] в смысле обобщения метода на задачу, когда распределенное управление входит в уравнение объекта.

Предложенный в данной работе алгоритм упрощает структуру асимптотики решения поставленной задачи. Упрощение исходит из того, что не вводятся регуляризующие переменные τ и ζ введенные в параграфе 4 работы [1].

Существование решения задачи (1)-(2) при достаточно малых ε следует из работы [2].

2.2 Постановка задачи

Рассмотрим управляемый процесс, описываемый уравнением

$$L_\varepsilon u(x,t,\varepsilon) \equiv u_t - \varepsilon^2 a(x) u_{x,x} - b(x,t)u - p(x,t,\varepsilon) = f(x,t), (x,t) \in \Omega, \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$u(x,0,\varepsilon)=0,\ u_x(0,t,\varepsilon)=0,\ u_x(1,t,\varepsilon)+\alpha u(1,t,\varepsilon)=0, \tag{2}$$

где $\alpha=$ const $>0, \Omega=(0<t\le T)\times(0<x<1), \varepsilon>0$-малый параметр. Пусть выполнены условия A) : $b(x,t), f(x,t)\in C^\infty(\overline{\Omega}), \forall x\in[0,1]\, 0<a(x)\in C^\infty[0,1],\ p(x,t,\varepsilon)$ - управляющая функция из $L_2(\overline{\Omega})$.

Требуется найти допустимое управление $p^0(x,t,\varepsilon)$ и соответствующее ему решение $u^0(x,t,\varepsilon)$ задачи (1), (2), чтобы функционал

$$I=\int_0^1[u(x,T,\varepsilon)-\Phi(x)]^2dx+\beta\int_0^1\int_0^T p^2(x,t,\varepsilon)\,dtdx,\ \beta=\text{const}>0$$

принимал наименьшее возможное значение при

$$p(x,t,\varepsilon)=p^0(x,t,\varepsilon), u(x,t,\varepsilon)=u^0(x,t,\varepsilon).$$

Здесь $\Phi(x)$ заданная функция из $L_2(0,1)$.

Следуя методике работы [3] (см. также [1]), поставленную задачу можно свести к нахождению функции $u(x,t,\varepsilon)$ из задачи (1)–(2) и управления

$$p(x,t,\varepsilon)=\frac{1}{2\beta}\psi(x,t,\varepsilon), \tag{3}$$

где функция $\psi(x,t,\varepsilon)\in W_2^{0,1}(\overline{\Omega})$ определяется из следующей задачи:

$$\partial_t\psi(x,t,\varepsilon)+\varepsilon^2\partial_x^2(a(x)\psi(x,t,\varepsilon))+b(x,t)\psi(x,t,\varepsilon)=0,\ \partial_x(a(x)\psi)\big|_{x=0}=0, \tag{4}$$

$$\left[\partial_x(a(x)\psi(x,t,\varepsilon))+\alpha a(x)\psi(x,t,\varepsilon)\right]\Big|_{x=1}=0,$$

$$\psi(x,T,\varepsilon)=-2[u(x,T,\varepsilon)-\Phi(x). \tag{5}$$

Следуя методу регуляризации для сингулярно возмущенных задач [4], введем регуляризующие переменные

$$\xi_l=\frac{\varphi_l(x)}{\varepsilon}\equiv\frac{(-1)^{l-1}}{\varepsilon}\int_{l-1}^x\frac{ds}{\sqrt{a(s)}},\ l=1,2. \tag{6}$$

И вместо искомой функции $u(x,t,\varepsilon)$ введем в рассмотрение расширенную функцию $\tilde{u}(x,t,\xi,\varepsilon), \xi=(\xi_1,\xi_2)$ такую, что сужение посредством регуляризующих функций совпадает с искомой функцией $u(x,t,\varepsilon)$:

$$\tilde{u}(M,\varepsilon)\big|_{\xi=\varphi(x,\varepsilon)}\equiv\tilde{u}(x,t,\varepsilon),\ \varphi(x,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}(\varphi_1(x),\varphi_2(x)), \xi=(\xi_1,\xi_2), M=(x,t,\xi). \tag{7}$$

На основании (6), находя из тождества (7) производные $\partial_t u(x,t,\varepsilon), \partial_x^2 u(x,t,\varepsilon)$, для расширенной функции $\tilde{u}(x,t,\xi,\varepsilon)$ естественно поставить задачу

$$\begin{gathered}\widetilde{L_\varepsilon}\tilde{u}(M,\varepsilon)\equiv D\tilde{u}-\varepsilon L_\xi\tilde{u}-\varepsilon^2L_x\tilde{u}-\tilde{p}(M,\varepsilon)=f(x,t),(x,t,\xi)\in Q\\ \left[\partial_x\tilde{u}(M,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{l=1}^2\varphi_l^{'}(x)\partial_{\xi_l}\tilde{u}(M,\varepsilon)+\alpha\tilde{u}(M,\varepsilon)\right]_{x=1,\xi_2=0}=0\end{gathered} \tag{8}$$

$$\left[\partial_x \tilde{u} + \frac{1}{\varepsilon}\sum_{l=1}^{2}\varphi_l^{'}(x)\partial_{\xi_l}\tilde{u}\right]_{x=0,\xi_1=0} = 0, \tilde{u}(M,\varepsilon)\Big|_{t=0} = 0. \tag{9}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$D \equiv \partial_t - D_\xi - b(x,t),\ D_\xi \equiv \left(\sum_{l=1}^{2}(-1)^{l-1}\partial_{\xi_l}\right)^2,\ L_\xi \equiv$$

$$\equiv a(x)\sum_{l=1}^{2}\left[2\varphi_i^{'}(x)\partial^2_{x,\xi_l} + \varphi_l^{''}(x)\partial_{\xi_l}\right]$$

$$L_x \equiv a(x)\partial_x^2,\ Q = (0,1)\times(0,T]\times(0,+\infty)\times(0,+\infty).$$

Отметим, что при переходе от исходной задачи (1)–(2) к расширенной задаче (8)–(9), расширению подвергается и управление $p(x,t,\varepsilon)$, т. е. вводится расширенная функция управления $\tilde{p}(M,\varepsilon)$ такая, что

$$\tilde{p}(M,\varepsilon)\Big|_{\xi=\varphi(x,\varepsilon)} \equiv p(x,t,\varepsilon).$$

Решение задачи (8)–(9) будем определять в виде

$$\tilde{u}(M,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i u_i(M),\ \tilde{p}(M,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i p_i(M). \tag{10}$$

Подставим (10) в задачу (8)–(9) и приравняем коэффициенты при однаковых степенях ε. Для коэффициентов получим итерационные задачи, которые будем решать в классе функций

$$U = \left\{u(M) : u(M) = v(x,t) + \sum_{l=1}^{2}\left[Z_l(N_l) + \omega_l(x,t)erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{t}}\right)\right]\right.$$

$$\left.\left|Z_l(N_l)\right| < c\exp(-\frac{\xi_l^2}{8t}, v(x,t), \omega_l(x,t) \in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right), N_l = (x,t,\xi_l)\cdot\right\}$$

В этом классе определим все коэффициенты частичной суммы ряда (10) и, используя принцип максимума, доказывается следующая теорема

Теорема 2.1. Пусть выполнены условия А) относителъно заданных функций. Тогда для достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеет место оценка

$$\left|u(x,t,\varepsilon) - u_{\varepsilon,n}(x,t,\varepsilon)\right| < c\varepsilon^{n+1}.$$

$n = 0,1,2,\ldots$, т. е. разложение (10) является асимптотическим решением задачи (1)–(2) при $\epsilon + 0$ и это разложение единственно в классе U.

Задача (4)–(5) расширяется в пространство большей размерности, аналогично параграфу 3. Умножим задачу (4)–(5) на функцию $a(x)$, затем введем обозначение $y(x,t,\varepsilon) = a(x)\psi(x,t,\varepsilon)$. Относительно $y(x,t,\varepsilon)$ получим задачу

$$\begin{aligned} K_\varepsilon y(x,t,\varepsilon) &\equiv \partial_t y(x,t,\varepsilon) + \varepsilon^2 a(x)\partial_x^2 y(x,t,\varepsilon) + \\ &+ b(x,t)y(x,t,\varepsilon) = 0,\ (x,t) \in \Omega_1, \end{aligned} \tag{11}$$

$$y(x,t,\varepsilon)\big|_{t=T} = -2a(x)\left[u(x,T,\varepsilon)-\Phi(x)\right],\ \partial_x y(x,t,\varepsilon)\big|_{x=0} = 0, \tag{12}$$

$$\left(\partial_x y(x,t,\varepsilon)+\alpha y(x,t,\varepsilon)\right)_{x=1} = 0,\ \Omega_1 = (0\le t<T)\times(0<x<1).$$

Введем в рассмотрение расширенную функцию $\tilde{y}(x,t,\xi,\varepsilon)$ такую, что

$$\tilde{y}(x,t,\xi,\varepsilon)\big|_{\xi=\varphi(x,\varepsilon)} \equiv y(x,t,\varepsilon).$$

Для расширенной функции можно поставить следующую задачу:

$$\widetilde{K}_\varepsilon \tilde{y}(M,\varepsilon) \equiv D_1\tilde{y}(M,\varepsilon)+\varepsilon L_\xi \tilde{y}(M,\varepsilon)+\varepsilon^2 L_x \tilde{y}(M,\varepsilon) = 0, M\in Q, \tilde{y}(M,\varepsilon)\big|_{t=T} =$$

$$= -2a(x)\left[\tilde{u}(x,T,\xi,\varepsilon)-\Phi(x)\right],\ \left(\partial_x \tilde{y}(M,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{l=1}^{2}\varphi_l(x)\partial_{\xi_l}\tilde{y}(M,\varepsilon)\right)$$

$$\left(\partial_x \tilde{y}(M,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\sum_{l=1}^{2}\varphi_l(x)\partial_{\xi_l}\tilde{y}(M,\varepsilon)+\alpha\tilde{y}(M,\varepsilon)\right)_{x=0,\xi_1=0} = 0 \tag{13}$$

$$D_1 \equiv \partial_t + D_\xi + b(x,t), M = (x,t,\xi),\ Q = \Omega_1\times(0<\xi_1<\infty)\times(0<\xi_2<\infty)$$

При этом выполняется необходимое условие регуляризации:

$$\left(\widetilde{K}_\varepsilon \tilde{y}(M,\varepsilon)\right)\big|_{\xi=\varphi(x,\varepsilon)} \equiv K_\varepsilon y(x,t,\varepsilon).$$

Решение задачи (13) ищем в виде

$$\tilde{y}(M,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i y(M), \tilde{u}(x,T,\xi,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{\infty}\varepsilon^i u_i(x,T,\xi). \tag{14}$$

Подставим их в задачу (13) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях в. Для коэффициентов получим итерационные задачи, которые будем решать в классе функций:

$$Y = \left\{ y(M) : y(M) = q(x,t)+\sum_{l=1}^{2}\left[X_l(N_l)+c_l(x,t)\,erfc\left(\frac{\xi_l}{2\sqrt{T-t}}\right)\right]\right.$$

$$\left.\left|X_l(N_l)\right| \le c\exp\left(-\frac{\xi_l^2}{8T}\right), q(x,t), c_l(x,t)\in C^\infty\left(\overline{\Omega}\right), N_l = (x,t,\xi_l)\right\}.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия А. Тогда для достаточно малых $\epsilon > 0$ имеет место оценка

$$\left|y(x,t,\varepsilon)-y_{\varepsilon,n}(x,t,\varphi(x,\varepsilon))\right| < c\varepsilon^{n+1}$$

$n = 0,1,2,\ldots$, т. е. сужение частичной суммы $y_{\varepsilon,n}(x,t,\varphi(x,\varepsilon))$ является асимптотическим решением задачи (11)–(12) при $\to +0$ и это разложение единственно в классе Y.

Исходя из теорем 1 и 2, на основании (3) и обозначения $y(x,t,\varepsilon) = a(x)\psi(x,t,\varepsilon)$, для управления $p(x,t,\varepsilon)$ легко доказать следующую теорему.

Теорема 2.3. Пусть для заданных функций выполнены предположения А.

Тогда для достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеет место оценка

$$\left| p(x,t,\varepsilon) - p_{\varepsilon,n}\left(x,t,\varphi(x,\varepsilon)\right) \right| < c\varepsilon^{n+1}.$$

$n = 0,1,2,\ldots$, т. е. сужение $p_{\varepsilon,n}\left(x,t,\varphi(x,\varepsilon)\right)$ частичной суммы ряда (10) является асимптотическим управлением задачи (1)–(2) при $\varepsilon \to +0$.

Литература

1. *Омуралиев А.С.* Об асимптотике решения одной задачи оптимального управления параболическим уравнением с малым параметром / А.С. Омуралиев, Р. Рафатов // АиТ. – 2011. – № 1. – С. 66–79.
2. *Плотников В.И.* Энергетическое неравенство и свойство переопределенности системы собственных функций / В.И. Плотников // Изв. АН СССР. Серия: Математика. – 1968. – Т. 32. – С. 743–755.
3. *Егоров А.И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами / А.И. Егоров. – М.: Наука, 1978.
4. *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений / С.А. Ломов. М.: Наука, 1981.
5. *Омуралиев А.С.* Регуляризация двумерной сингулярно возмущенной параболической задачи / А.С. Омуралиев // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 2006. – Т. 46. – № 8. – С. 1423–1432.

АННОТАЦИИ ДОКЛАДОВ НЕ ПРЕДСТАВЛЕННЫХ АВТОРАМИ СТАТЕЙ

А. Аргучинцев
(Российская Федерация)

ВАРИАЦИОННЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ СОСТАВНЫМИ СИСТЕМАМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. Рассматривается несколько специальных классов задач оптимального управления системами линейных гиперболических уравнений первого порядка. Начально-краевые условия и элементы правых частей гиперболической системы определяются из управляемых систем дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений. Целевой функционал является линейным или квадратичным. Задачи такого типа возникают при управлении некоторыми процессами химической технологии, а также при моделировании динамики популяций с учетом возрастной структуры особей. На основе неклассических точных (без остаточного члена) формул приращения целевого функционала исходные задачи сведены к задачам оптимального управления системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Доказаны соответствующие условия оптимальности вариационного типа. Обсуждены варианты численного решения.

А.К. Баетов
(Кыргызстан)

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРОМ

Аннотация. При исследовании задач спектральной теории немаловажную роль играют значения параметров задачи, в частности от их значения может зависеть существование решения задачи в целом.

У. Дуйшеналиева
(Кыргызстан)

ТОЧЕЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ УПРУГИМИ КОЛЕБАНИЯМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ ФРЕДГОЛЬМОВЫМИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Аннотация. Исследованы задачи нелинейного оптимального управления упругими колебаниями, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями в случае, когда колебания происходят под действием точечных подвижных источников и получены достаточные условия существования и единственности решения задачи нелинейной оптимизации.

А. Керимбеков
(Кыргызстан)

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. В статье исследованы вопросы разрешимости одного класса полулинейных систем дифференцияальных уравнений, которые появляются при решении задач оптимального управления. Разработан алгоритм построения частных решений для отдельных полулинейных дифференциальных уравнений. Приведены примеры.

А. Керимбеков, Г. Кененбаева
(Кыргызстан)

О ПРИМЕНЕНИИ ФОРМУЛЫ ДЮАМЕЛЯ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Аннотация. В статье исследованы вопросы о существовании задачи оптимального управления колебательными процессами. Установлено, что искомое оптимальное управление определяется как решение систем интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода. Найдено достаточное условие разрешимости задачи оптимизации.

З.С. Кабаева
(Кыргызстан)

НЕЛИНЕЙНОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТЕПЛОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ

Аннотация. В данной статье рассмотрена задача нелинейной оптимизации теплового процесса в случае, когда функция внешнего воздействия нелинейно зависит от двумерного векторного управления и минимизируется в интегральный квадратичный функционал. На примере численных расчетов исследовано влияние отдельных параметров задачи на скорость сходимости приближенных решений к точному решению. Результаты исследований приведены в виде таблиц.

Г. Момбекова
(Кыргызстан)

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ПРИ ОПТИМАЛЬНОМ ГРАНИЧНОМ УПРАВЛЕНИИ ТЕПЛОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ

Аннотация. Объект исследования – задачи оптимального управления тепловыми процессами, описываемые интегро-дифференциальными уравнениями в частных производных с интегральным оператором Фредгольма.

К. Нуртазина
(Казахстан)

УПРАВЛЯЕМОСТЬ И ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТЬ СИСТЕМ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Аннотация. Теоремы об условиях управляемости и единственности решения обратной задачи для систем с распределенными параметрами, описываемых параболическими и гиперболическими уравнениями.

Сейдакмат кызы Э.
(Кыргызстан)

О ВЛИЯНИИ ПАРАМЕТРА ЯДРА ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВОЛЬТЕРРА НА СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ

Анотация. Рассматриваются задачи граничного оптимального управления тепловым процессом, описываемые вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями, и исследована скорость сходимости приближений с влиянием параметра ядра интегрального оператора. Основное внимание уделяется вопросу влияния числовых параметров ядра интегрального оператора на скорость сходимости приближений оптимального управления и оптимального процесса.

А. Эрмекбаева
(Кыргызстан)

ОПТИМАЛЬНОЕ ТОЧЕЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ТЕПЛОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ ФРЕДГОЛЬМОВЫМИ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ

Аннотация. В работе исследована задача оптимального управления тепловыми процессами, описываемыми фредгольмовыми интегро-дифференциальными уравнениями в случае, когда распространение тепла происходит под действием точечного подвижного источника. При этом функция внешнего воздействия нелинейно зависит от управления.

A. Zhubanysheva
(Kazakhstan)

C(N)D-APPROACH IN APPROXIMATION THEORY

Annotation. It is considered the problem of numerical differentiation of functions in the context of C(N)D.

Секция II

Дифференциальные уравнения

Абдумиталип уулу *К.*
(Кыргызстан)

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРОМ

Аннотация. Доказаны существование и единственность решения краевой задачи для уравнения четвертого порядка в двумерной области, содержащей произведение смешанного параболо-гиперболического оператора и дифференциального оператора второго порядка по *x*. Методом понижения порядка задача 1 сводится к задаче Трикоми для смещенного параболо-гиперболического уравнения второго порядка с переменным коэффициентом при младших членах с линией изменения типа *y* = 0. Используя метод функции Римана для гиперболического уравнения второго порядка с переменным коэффициентом и метод функции Грина для параболического уравнения второго порядка с младшим членом, задача сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода, разрешимость которого устанавливается методом последовательных приближений. После определения следа искомой функции и её производной по y, решение задачи сводится к задаче Коши с начальными данными в области D_2 при $x=-y$, а в области D_1 – при $x=0$. Приведены достаточные условия разрешимости рассматриваемой задачи Трикоми.

Ключевые слова: краевые задачи; параболо-гиперболический оператор; единственность; существование; функции Римана и Грина; уравнение четвертого порядка; уравнение Фредгольма второго рода; метод последовательных приближений; задача Трикоми.

В области, ограниченной отрезками линий $AC: x+y=0$, $CB: x-y=\ell(\ell>0)$, $BB_0: x=\ell, B_0A_0: y=h(h>0)$, $A_0A: x=0$ рассмотрим уравнение

$$0\equiv\begin{cases}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial}{\partial y}+c_1(x,y)\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,(x,y)\in D_1\\ \left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+c_2(x,y)\right)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,(x,y)\in D_2\end{cases}, \tag{1}$$

где $c_i(x,y)(i=1,2)-$ заданные коэффициенты.

Пусть $D_1=D\cap(y>0), D_2=D\cap(y<0)$, а $C^{n+m}-$ означает класс функций, имеющих непрерывные производные $\dfrac{\partial^{r+s}}{\partial x^r\partial y^s}(r=0,1,\ldots,n;s=0,1,\ldots,m)$[1]. Отметим, что уравнение (1) в области D_1 имеет четырехкратную действительную характеристику $y=$ const, а в области D_2 – двукратную характеристику $y=$ const и две различные характеристики $x+y=$ const, $x-y=$ const [2].

Для уравнения (1) в области D рассматривается.

Задача 1 (Трикоми). Требуется найти функцию $u(x,y)$ из класса

$$u,u_x,u_{xx}\in C\left(\overline{D}\right)\cap C^1(D)\cap\left[C^{2+1}(D_1)\cup C^{2+2}(D_2)\right],$$

удовлетворяющую в области $D\setminus(y=0)$ уравнению (1) и следующим условиям:

$$u\big|_{x=0}=\varphi_1(y),u_x\big|_{x=0}=\varphi_2(y),0\le y\le h, \tag{2}$$

$$u_{xx}\big|_{x=0}=\varphi_3(y),u_{xx}\big|_{x=l}=\varphi_4(y),0\le y\le h, \tag{3}$$

$$u\Big|_{x=-y} = \psi_1(y), -\frac{l}{2} \le y \le 0, \tag{4}$$

$$u_x\Big|_{x=-y} = \psi_2(y), -\frac{l}{2} \le y \le 0, \tag{5}$$

$$u_{xx}\Big|_{x=-y} = \psi_3(y), -\frac{l}{2} \le y \le 0, \tag{6}$$

где $\varphi_i(y)\left(i=\overline{1,4}\right), \psi_j(y)\left(j=\overline{1,3}\right)-$ заданные гладкие функции, причем

$$c_2(x,y) \in C(D_2), c_1(x,y) \in C(D_1)$$

$$\varphi_1(y), \varphi_2(y) \in C^2[0,h], \varphi_3(y), \varphi_4(y) \in C[0,h],$$

$$\psi_i(y) \in C^2\left[-\frac{\ell}{2}, 0\right](i=1,2), \psi_3(y) \in C^4\left[-\frac{\ell}{2}, 0\right]$$

$$\varphi_1(0) = \psi_1(0), \varphi_2(0) = \psi_2(0), \varphi_3(0) = \psi_3(0).$$

Краевые задачи для уравнения (1) изучены и в работах [3, 4].

Из постановки задачи 1 вытекают следующие условия склеивания:

$$\begin{aligned} &u(x,+0) = u(x,-0) = \tau(x), 0 \le x \le \ell, \\ &u_y(x,+0) = u_y(x,-0) = \nu(x), 0 \le x \le \ell, \end{aligned} \tag{7}$$

где $\tau(x)$ и $\nu(x)$ – пока неизвестные функции.

Для решения задачи 1 рассмотрим следующие вспомогательные задачи.

Задача 2. Требуется найти в области D_1 решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), (3) и (7), причем

$$\tau(0) = \varphi_1(0), \tau'(0) = \varphi_2(0), \tau''(0) = \varphi_3(0), \tau''(\ell) = \varphi_4(0).$$

Задача 3. Требуется найти в области D_2 решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (4)–(7), причем

$$\tau(0) = \psi_1(0), \tau'(0) = \psi_2(0), \tau''(0) = \psi_3(0).$$

Методом понижения порядка задача 1 сводится к задаче Трикоми для смешанного параболо-гиперболического уравнения второго порядка с переменным коэффициентом при младших членах с линией изменения типа $y = 0$. Используя метод функции Римана для гиперболического уравнения второго порядка с переменным коэффициентом и метод функции Грина для параболического уравнения второго порядка с младшим членом, задача сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода, разрешимость которого устанавливается методом последовательных приближений.

После определения следа искомой функции и её производной по y, решение задачи сводится к задаче Коши с начальными данными в области D_2 при $x = -y$, а в области $D_1 -$ при $x = 0$. Приведены достаточные условия разрешимости рассматриваемой задачи Трикоми.

Литература

1. *Жегалов В.И.* Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка / В.И. Жегалов, Е.А. Уткина // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 10. – С. 73–76.
2. *Джураев Т.Д.* К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвёртого порядка / Т.Д. Джураев, А. Сопуев. – Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.
3. *Джураев Т.Д.* Краевые задачи для уравнений смешанного и смешанно-составного типов / Т.Д. Джураев. – Ташкент: Фан, 1979. – 240 с.
4. *Джураев Т.Д.* Краевые задачи для уравнений парабологиперболического типа / Т.Д. Джураев, А. Сопуев, М. Мамажанов. – Ташкент: Фан, 1986. – 220 с.
5. *Тихонов А.Н.* Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
6. *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики / А.В. Бицадзе. – М.: Наука, 1976. – 296 с.
7. *Полянин А.Д.* Справочник по линейным уравнениям математической физики / А.Д. Полянин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – 576 с.
8. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа / А. Фридман. – М.: Мир, 1968. – 428 с.
9. *Денисов А.М.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / А.М. Денисов, А.В. Разгулин. – М.: МГУ, 2009. – 114 с.

А.А. Акматов, А.М. Токторбаев, К.К. Шакиров
(Кыргызстан)

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ С ОБОБЩЕННОЙ ФУНКЦИЕЙ НЕОДНОРОДНОСТИ

Аннотация. Решение сингулярной задачи зависит от неоднородной части рассматриваемых уравнений. Если неоднородная часть – аналитическая функция, то переходя к комплексной области, получим оценку сингулярной задачи. Когда неоднородная часть дифференциальных уравнений будет обобщенной функцией, то способы получения оценки будут иными. Одним словом, функция не является функцией в обычном смысле. В работе показаны способы получить асимптотические оценки сингулярной задачи в пространстве обобщенных функций. Для этого применим методы вариации постоянных, метод последовательных приближений, метод мажорант и метод от противного, а также некоторые свойства обобщенных функций. Вводим некоторые определения и докажем леммы и теорему. При исследовании поставленной задачи не переходим к комплексной области. В итоге докажем существование и единственность решения рассматриваемой сингулярной задачи.

Ключевые слова: сингулярная функция; особые точки; сингулярные возмущения; асимптотика; устойчивость; задача Коши.

Введение. В работе [2] рассмотрен случай с $\delta-$образной неоднородностью. Но не рассматривался случай, когда точка *a* стремится к бесконечности. Сингулярно возмущенные задачи в теории обобщенных функций рассмотрены в работах [2–4]. Решение задачи ищем в пространстве $S(R^1)$, учитывая свойства функции Дирака. Докажем асимптотические близости решений возмущенной и невозмущенной задачи, полученные в пространствах обобщенных функций [5, 6]. Способы решения, обыкновенные дифференциальные уравнения с функцией влияний Дирака, показаны в работе [1].

Материалы и методы исследования

Рассмотрим задачу

$$\varepsilon y'(t,\varepsilon) = D(t)y(t,\varepsilon) + \varepsilon\left[\delta(t-a) + b(t)y(t,\varepsilon)\right], \tag{1}$$

$$y(t_0,\varepsilon) = y^0, \ \left|y^0\right| = C_0\varepsilon, \tag{2}$$

где $D(t) = \alpha(t) + i\beta(t), t \in R^1$, $0 < \varepsilon -$ малый параметр, $\delta(t-a)$ – сингулярная функция или функция Дирака по оси t со сдвигом в точке a, $\left[t_0, T\right] -$ отрезок действительной оси, $t_0 < T$. Здесь $S(R^1)$ – пространство основных функций, $S'(R^1)$ – пространство обобщенных функций и $y(t,\varepsilon)$ – неизвестная обобщенная функция, $\left|b(t)\right| \le c$, $c << 1$ – постоянные число.

Задача. Доказать существование, ограниченность и единственность решения $y(t,\varepsilon)$ на промежутке $\left[t_0, T\right]$.

Для решения поставленной задачи от правых частей (1) потребуем выполнения следующих условий:

ϑ_1: $\operatorname{Re} D(t) < 0$ при $t_0 \le t < T_0$, $\operatorname{Re} D(t) > 0$ при $T_0 < t \le T$, $\operatorname{Re} D(T_0) = 0$.

ϑ_2: $F(t) = \operatorname{Re}\int\limits_{t_0}^{t} D(s)ds$, $\forall t \in \left[t_0, T\right]$, $F(t) < 0$, $F(t_0) = F(T) = 0$.

ϑ_3: $\delta(t-a)$ – сингулярная обобщенная функция в точке a.

Взяв формально $\varepsilon = 0$, получим невозмущенную задачу

$$D(t)\tilde{y}(t,0) = 0, \ D(t) \ne 0. \tag{3}$$

Имеет единственное решение в пространстве $S(R^1)$

$$\tilde{y}(t) = 0. \tag{4}$$

Определение 1. δ-образной последовательностью называется последовательность h_N неотрицательных гладких функций, равных 0 вне стремящихся к 0, при $N \to \infty$ окрестностей и обладающих интегралом, равными единице.

Определение 2. Регулярная обобщенная функция имеет порядок сингулярности меньше или равно нуля.

Определение 3. Степень производная от сингулярной обобщенной функции определить их порядок сингулярности.

Пример 1. Функция Дирака $\delta(x)$ имеет сингулярности первого порядка. А производная $\delta'(x)$ имеет сингулярности второго порядка.

В точках $t \ne a$ и $a \to +\infty$ функция Дирака регулярно [5]. Из (1) получаем

$$\varepsilon y'(t,\varepsilon) = \left[D(t) + \varepsilon b(t)\right]y(t,\varepsilon). \tag{5}$$

Имеет место следующая лемма.

Лемма 1. Пусть выполнены условия $\vartheta_1 - \vartheta_2$. Тогда $\forall t \in \left[t_0, T\right]$ для решение задачи (5) и (2) с учетом регулярности функции Дирака справедлива оценка

$$\left|y(t,\varepsilon)\right| \le M_0\varepsilon, \tag{6}$$

где M_0 – некоторая постоянная.

Доказательство. Пусть функция Дирака регулярна. Решение (5) с учетом (2)

$$\left|y(t,\varepsilon)\right| \le y^0 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\left(F(t)-\varepsilon F_0(t)\right)\right),$$

где $F(t)=\mathrm{Re}\int\limits_{t_0}^{t} D(s)ds$, и $F_0(t)=\mathrm{Re}\int\limits_{t_0}^{t} b(s)ds$. При проводимой оценки выражение $\varepsilon F_0(t)$ не является существенным, следовательно, по модулю верно оценка (6). Лемма доказана.

Лемма 2. Запаздывающая функция Грина дается формулой

$$G_a(t)=\begin{cases}0 & \text{при } t<a,\\ \exp\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\int\limits_a^t D(\tau)d\tau\right) & \text{при } t>a.\end{cases}$$

Доказательство. Значения интеграла

$$\int\limits_{t_0}^{t} \delta(\tau-a)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau}^{t} D(s)d\tau\right)d\tau. \qquad (7)$$

В равенстве (7) в место $\delta(t-a)$ поставим последовательность h_N, переходя к пределу при $N\to\infty$, получаем требуемое решение:

$$G_a(t)=\lim_{N\to\infty}\int\limits_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau}^{t} D(s)ds\right)h_N(\tau-a)d\tau=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{a}^{t} D(s)ds\right),$$

если $t_0<a<t$. Лемма доказана.

При $t=a$, справедлива теорема.

Теорема. Пусть выполнены условия ϑ_1 - ϑ_3. Тогда $\forall t\in\left[t_0,T\right]$ решение задачи (1)–(2) существует, единственно и для нее справедлива оценка

$$\left|y(t,\varepsilon)\right| \le \left|\overline{y}_1(t,\varepsilon)\right| q_0 \qquad (8)$$

где $1<q_0$ – некоторая постоянная, зависящая от ε.

Доказательство. Пусть $t=a$. Задачи (1)–(2) заменим следующим эквивалентным интегральным уравнением:

$$y(t,\varepsilon)=y^0\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{t} D(s)ds\right)+\int\limits_{t_0}^{t}\left[\delta(\tau-a)+b(\tau)y(\tau,\varepsilon)\right]\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\tau}^{t} D(s)ds\right)d\tau. \qquad (9)$$

Для доказательства существования решения уравнения (9) применим метод последовательных приближений.

Последовательные приближения определим следующим образом:

$$y_0(t,\varepsilon)\equiv 0,$$

$$y_m(t,\varepsilon)=y_1(t,\varepsilon)+\int\limits_{t_0}^{t} b(\tau)y_{m-1}(\tau,\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t_0}^{t} D(s)ds\right)d\tau. \qquad (10)$$

Проведем оценку последовательных приближений (10).

$$y_0(t,\varepsilon)\equiv 0\,,\;\; y_1(t,\varepsilon)=y^0\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}D(s)ds\right)+\int_{t_0}^{t}\delta(\tau-a)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}D(s)ds\right)d\tau\,.$$

Учитывая лемму 2

$$y_1(t,\varepsilon)=y^0\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}D(s)ds\right)+\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{a}^{t}D(s)ds\right)=$$
$$=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{a}^{t}D(s)ds\right)\left[1+y^0\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{a}D(s)ds\right)\right],$$

По модулю

$$\left|y_1(t,\varepsilon)\right|\le\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{a}^{t}D(s)ds\right)\left[1+C_0\varepsilon\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{a}D(s)ds\right)\right]=\left|\overline{y}_1(t,\varepsilon)\right|q_0\,,$$

где $q_0=1+C_0\varepsilon\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{a}D(s)ds\right).$

При $m=2$, имеем $y_2(t,\varepsilon)=y_1(t,\varepsilon)+\int_{t_0}^{t}b(\tau)y_1(\tau,\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}D(s)ds\right)d\tau$. По модулю

$$\left|y_2(t,\varepsilon)\right|\le y^0\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{Re}\int_{t_0}^{t}D(s)ds\right)\left[1+\int_{t_0}^{t}b(\tau)d\tau\right]=\left|\overline{y}_1(t,\varepsilon)\right|q_0^2\,.$$

Пусть имеет место оценка

$$\left|y_m(t,\varepsilon)\right|\le\left|\overline{y}_1(t,\varepsilon)\right|q_0^m\,. \tag{11}$$

Докажем справедливость оценки для $(m+1)$, $\left|y_{m+1}(t,\varepsilon)\right|\le\left|\overline{y}_1(t,\varepsilon)\right|q_0^{m+1}$.

Так как $q_0^{m+1}\le q_0$, поэтому $\left|y_{m+1}(t,\varepsilon)\right|\le\left|\overline{y}_1(t,\varepsilon)\right|q_0$. Таким образом, оценка (11) верна $\forall m\in N$. Из (11) вытекает, что $\{y_m(t,\varepsilon)\}$ ограничена.

Теперь докажем сходимости последовательных приближений $\{y_m(t,\varepsilon)\}$ применяя метод мажорант. Для этого последовательность $\{y_m(t,\varepsilon)\}$ представим следующем виде:

$$y_m(t,\varepsilon)=y_1(t,\varepsilon)+\left(y_2(t,\varepsilon)-y_1(t,\varepsilon)\right)+\left(y_3(t,\varepsilon)-y_2(t,\varepsilon)\right)+\ldots+\left(y_m(t,\varepsilon)-y_{m-1}(t,\varepsilon)\right).$$

Оценим $\left|y_m(t,\varepsilon)-y_{m-1}(t,\varepsilon)\right|$. Имеем при $m=2$,

$$\left|y_2(t,\varepsilon)-y_1(t,\varepsilon)\right|\le\left|y^0\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_0}^{t}D(s)ds\right)\int_{t_0}^{t}b(\tau)d\tau\right|=\left|y_1(t,\varepsilon)\right|c(t-t_0)\,.$$

При $m = 3$ получим

$$\left|y_3(t,\varepsilon) - y_2(t,\varepsilon)\right| \le \left| c(t-t_0) y^0 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{t} D(s)ds \right) \int_{t_0}^{t} b(\tau)\, d\tau \right| = \left|y_1(t,\varepsilon)\right| \left(c(t-t_0)\right)^2 .$$

Пусть

$$\left|y_m(t,\varepsilon) - y_{m-1}(t,\varepsilon)\right| \le \left|y_1(t,\varepsilon)\right| \left(c(t-t_0)\right)^{m-1} . \tag{12}$$

Докажем, справедливость оценки (12) для $(m+1)$

$$\left|y_{m+1}(t,\varepsilon) - y_m(t,\varepsilon)\right| \le \left| \left(c(t-t_0)\right)^{m-1} y^0 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{t} D(s)ds \right) \int_{t_0}^{t} b(\tau)\, d\tau \right| = \left|y_1(t,\varepsilon)\right| \left(c(t-t_0)\right)^m .$$

Оценка (12) верна $\forall m \in N$. Таким образом

$$\begin{gathered} \left|y_1(t,\varepsilon) + \left(y_2(t,\varepsilon) - y_1(t,\varepsilon)\right) + \ldots + \left(y_m(t,\varepsilon) - y_{m-1}(t,\varepsilon)\right) + \ldots\right| \le \\ \le \left|y_1(t,\varepsilon)\right| + \left|y_2(t,\varepsilon) - y_1(t,\varepsilon)\right| + \ldots + \\ + \left|y_m(t,\varepsilon) - y_{m-1}(t,\varepsilon)\right| + \ldots \le \left|y_1(t,\varepsilon)\right| \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(c(t-t_0)\right)^m \right) = \left|y_1(t,\varepsilon)\right| \times \frac{1}{1 - c(t-t_0)} . \end{gathered} \tag{13}$$

Из (13) следует, что последовательность $\left\{y_m(t,\varepsilon)\right\}$, $\forall t \in \left[t_0, T\right]$ и при $c(t-t_0) < 1$ сходится к некоторой функции $y(t,\varepsilon)$, которая является решением задачи (1) и для нее справедлива оценка $\left|y(t,\varepsilon)\right| \le \left|\overline{y}_1(t,\varepsilon)\right| q_0$. Оценка (8) доказана.

Докажем единственность решения методом от противного. Допустим, что существует другое решение $x(t,\varepsilon)$ задачи (1)–(2).

$$x(t,\varepsilon):\ x(t,\varepsilon) = y^0 \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{t} D(s)ds \right) + \int_{t_0}^{t} \left[\delta(\tau - a) - b(\tau) x(\tau,\varepsilon)\right] \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{\tau}^{t} D(s)ds \right) d\tau .$$

Учитывая (10), получим

$$\left|y_m(t,\varepsilon) - x(t,\varepsilon)\right| \le \int_{t_0}^{t} \left[y_{m-1}(\tau,\varepsilon) - x(\tau,\varepsilon) \right] b(\tau) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{Re} \int_{\tau}^{t} D(s)ds \right) d\tau . \tag{14}$$

Далее, учитывая (14)

$$\left|y_1(t,\varepsilon) - x(t,\varepsilon)\right| \le \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{Re} \int_{a}^{t} D(s)ds \right) \int_{t_0}^{t} \left|b(\tau)\right| d\tau = c \left|\overline{y}_1(t,\varepsilon)\right| \left(t - t_0\right),$$

$$\begin{gathered} \left|y_2(t,\varepsilon) - x(t,\varepsilon)\right| \le \\ \le \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{Re} \int_{a}^{t} D(s)ds \right) \int_{t_0}^{t} \left|y_1(\tau,\varepsilon) - x(\tau,\varepsilon)\right| \times \left|b(\tau)\right| d\tau \le c^2 \left|y_1(t,\varepsilon)\right| \frac{\left(t - t_0\right)^2}{2}. \end{gathered}$$

Предположим, что:

$$\left|y_m(t,\varepsilon)-x(t,\varepsilon)\right|\le\frac{c^m\left(t-t_0\right)^m}{m!}\left|\overline{y}_1(t,\varepsilon)\right|. \tag{15}$$

Тогда $\left|y_{m+1}(t,\varepsilon)-x(t,\varepsilon)\right|\le\left|\overline{y}_1(t,\varepsilon)\right|\dfrac{c^{m+1}\left(t-t_0\right)^{m+1}}{\left(m+1\right)!}$, …, видно, что $\forall m\in N$ верна (15).

Отсюда вытекает $\left|y(t,\varepsilon)-x(t,\varepsilon)\right|\le 0\Rightarrow y(t,\varepsilon)=x(t,\varepsilon)$. Единственность решения доказана.

Пример. $D(t)=t+i$, $t\in\left[-1,1\right]$, $t_0=-1$, $T_0=0$, $T=1$, $\delta(t-0,9)$. Условия $\vartheta_1-\vartheta_3$ выполняется, $\left[-1,0\right)$ - интервал устойчивости, $\left(0,1\right]$ - интервал неустойчивости.

Первое приближения

$$y_0(t,\varepsilon)\equiv 0,$$

$$y_1(t,\varepsilon)=y^0\exp\left(\frac{\left(t+i\right)^2-\left(t_0+i\right)^2}{2\varepsilon}\right)+\exp\left(\frac{(t+i)^2-\left(a+i\right)^2}{2\varepsilon}\right),$$

по модулю

$$\left|y_1(t,\varepsilon)\right|\le\exp\left(\frac{t^2-0.81}{2\varepsilon}\right)\times\left[1+C_0\varepsilon\exp\left(-\frac{0.18}{2\varepsilon}\right)\right.$$

Функция $\exp\left(\dfrac{t^2-1}{2\varepsilon}\right)$ принадлежит в пространстве $S(R^1)$.

Заключение. Подведя итог, можем сказать, что последовательность $\left\{y_m(t,\varepsilon\right\}$ равномерно сходится к некоторой функции $y(t,\varepsilon)$, которая является решением уравнения (1). Когда неоднородная часть задачи (1) связана обобщенными функциями Дирака, то она неоднородна лишь в одной точке *a*, потому что функция Дирака не является функцией в обычном смысле. В этой работе оценки задачи (1), (2) получены в пространстве $S(R^1)$, т. е. в действительной области. Интеграл функции Дирака со сдвигом *a* в пространстве $S'(R^1)$, равно

$$\int_{t_0}^{t}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\tau}^{t}D(s)ds\right)\delta(\tau-a)d\tau=\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{a}^{t}D(s)ds\right),$$

где $0<a<T$. Интеграл $\exp\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_{a}^{t}D(s)ds\right)$ принадлежит пространству $S(R^1)$. По доказанной выше теореме видно, что в пространстве обобщенных функций, тоже имеет место предельный переход решений возмущенной и невозмущенной задачи.

Литература

1. *Арнольд В.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. МЦНМО / В.И. Арнольд. – М., 2012. – С. 54–59.
2. *Акматов А.А.* Бисингулярная задача с δ-образной неоднородностью / А.А. Акматов // Журнал Евразийское научное объединение, М. – 2022. – № 1. – С. 3–6.
3. *Акматов А.А.* Асимптотика решений однородного бисингулярно возмущенного дифференциального уравнения в теории обобщенных функций / А.А. Акматов // Журнал Бюллетень науки и практики. М. – 2022. – № 2. – С. 18–25.
4. *Акматов А.А.* Метод регуляризации решений бисингулярно возмущенной задачи в пространстве обобщенных функций / А.А. Акматов // Журнал Бюллетень науки и практики, М. – 2022. – № 2. – С. 10–17.
5. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики / В.С. Владимиров. – М.: Наука, 1981. – С. 82–102.
6. *Гельфанд И.М.* Обобщенные функции и действия над ними / И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1959. – С. 24–63.

А.Ж. Аширбаева, Г.К. Садыкова
(Кыргызстан)

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА СО МНОГИМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Аннотация. В работе для решения системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка используется метод дополнительного аргумента. В статье рассмотрена задача Коши. Использование метода дополнительного аргумента, разработанного кыргызскими учеными, для новых классов дифференциальных, интегро-дифференциальных уравнений и систем таких уравнений актуально и сегодня. Особенность этого метода в том, что задача сводится к системе интегральных уравнений, эквивалентной поставленной задаче. Это делается путем введения новой дополнительной переменной. Существование и единственность решения системы интегральных уравнений доказаны на основе принципа сжатых отображений. Особенность статьи в том, что начальная задача для системы уравнений многих переменных сводится к системе интегральных уравнений. Для подтверждения результатов в статье приводится конкретный пример и решение.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение; частные производные; нелинейная система; дополнительный аргумент; сжатое отображение; задача Коши; многомерный случай.

Моделирование многих физических процессов сводится к системе дифференциальных уравнений с частными производными. Найти решения таких систем сложно. Использование метода дополнительного аргумента для решения системы уравнений в частных производных является актуальной задачей. Однако мы не можем применить этот метод ко всем системам.

В данной работе мы рассмотрим следующую систему, в которой можно использовать МДА:

$$\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} a_k(t,x,u)\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial x_k} = f_i(t,x,u), \tag{1}$$

$(t, \mathrm{x}) \in G_{n+1}(T) = [0, T] \times R^n$,

$$u = (u_1(t,x), ..., u_1(t,x)), \quad x = (x_1, .., x_n), \ (t,x) \in G_{n+1}(T) = [0,T] \times R^n.$$

Для системы (1) рассмотрим начальную задачу:

$$u_i(0,x) = \phi_i(x), \ i = 1,2,..,n, \ x \in R^n.$$

МДА применяли для различных систем дифференциальных уравнений в частных производных (СДУ в ЧП). Эти применения мы можем видеть в научных статьях М.И. Иманалиева, С.Н. Алексеенко, А.Ж. Аширбаевой.

В [1] рассмотрена задача (1), (2) с

$$a_i(t,x,u) = u_i(t,x), \quad i = 1,..,n.$$

Доказательство существования решения задачи (1), (2) с $a_i(t,x,u) = a_i(t,x,u_{n-1})$ приведено в [2].

Пространства функций $\bar{C}^{\alpha_1,...,\alpha_l}$, Lip(N$|_u$,M$|_v$,…) из [1,2] используются в данной работе.

Теорема. Пусть функции

$$\phi_i(\mathrm{x}) \in \bar{C}^1(R^n), \ a_i(t,\mathrm{x},\mathrm{u}), f_i(t,\mathrm{x},\mathrm{u}) \in \bar{C}^{0,\underbrace{1,...,1}_{раз},\underbrace{1,...,1}_{n\,раз}}(G_{n+1}(T) \times R^n). \ \mathrm{i}=1,2,..,\mathrm{n}.$$

Тогда СДУ в ЧП (1) с условием (2) имеет единственное, ограниченное решение в $G_{n+1}(T^*)$, где T* ($0 \le T^* \le T$) определяется из исходных данных.

Доказательство. Для СДУ в ЧП (1) с условием (2) используем МДА. Рассматриваемая задача эквивалентна системе интегральных уравнений (СИУ):

$$\begin{cases} u_i(t,\mathrm{x}) = \phi_i(\mathrm{p}(0,t,\mathrm{x})) + \int_0^t f_i(\nu,\mathrm{p}(\nu,t,\mathrm{x}),\mathrm{u}(\nu,\mathrm{p}(\nu,t,\mathrm{x})))d\nu \\ p_i(s,t,\mathrm{x}) = x_i - \int_s^t a_i(\nu,\mathrm{p}(\nu,t,\mathrm{x}),\mathrm{u}(\nu,\mathrm{p}))d\nu, \end{cases} \tag{3}$$

$$\mathrm{p}(s,t,\mathrm{x}) = (p_1(s,t,\mathrm{x}), p_2(s,t,\mathrm{x}), ..., p_n(s,t,\mathrm{x}),$$

$$i = 1,2,..,n, \quad (s,t,\mathrm{x}) \in Q_{n+2}(T) = \{(s,t,\mathrm{x}) \big| 0 \le s \le t \le T, \ \mathrm{x} \in R^n\}.$$

Для СДУ в ЧП (1) с условием (2) применяя МДА, приходим к СИУ. Мы можем видеть такие применения в работах [1–4]. И наоборот, из СИУ получим СДУ в ЧП (1) с условием (2). При этом докажем эквивалентность.

Из (3) имеем:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial t} + \sum_{k=1}^n a_k(t,x,u)\frac{\partial u_i(t,x)}{\partial x_k} = f_i(t,x,u) + \\ &+\sum_{k=1}^n \frac{\partial \phi_i}{\partial x_i}\left[\frac{\partial p_i(0,t,x)}{\partial t} + \sum_{k=1}^n a_k(t,x,u)\frac{\partial p_i(0,t,x)}{\partial x_k}\right] + \\ &+\int_0^t \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_l} + \sum_{r=1=}^n \ \sum_{l=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial u_r}\frac{\partial u_r}{\partial x_l}\right)\left[\frac{\partial p_l(\nu,t,x)}{\partial t} + \sum_{k=1}^n a_k(t,x,u)\frac{\partial p_l(\nu,t,x)}{\partial x_k}\right]d\nu. \end{aligned} \tag{4}$$

Из (4) следует:

$$\frac{\partial p_i(s,t,\mathrm{x})}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} a_k(t,\mathrm{x},\mathrm{u}) \frac{\partial p_l(s,t,\mathrm{x})}{\partial x_k} = 0,$$
$$p_i(t,t,\mathrm{x}) = x_i,\ i = 1,2,..,n. \tag{5}$$

Учитывая (5), из СИУ получим СДУ в ЧП (1) с условием (2).

Заменим в (3) переменную t через s, переменные x_i через $p_i(s,t,\mathrm{x}),\quad i = 1,2,...,n,$ из СИУ (3) получаем следующую СИУ:

$$\begin{cases} \omega_i(s,t,\mathrm{x}) = \phi_i(\mathrm{p}(0,t,\mathrm{x})) + \int\limits_0^s f_i(\nu,\mathrm{p}(\nu,t,\mathrm{x}),\mathrm{w}(s,t,\mathrm{x}))d\nu \\ p_i(s,t,\mathrm{x}) = x_i - \int\limits_s^t a_i(\nu,\mathrm{p}(\nu,t,\mathrm{x}),\mathrm{w}(s,t,\mathrm{x}))d\nu, \end{cases} \tag{6}$$

где

$$\omega_i(s,t,\mathrm{x}) = u_i(s,\mathrm{p}(s,t,\mathrm{x})),$$

$$\mathrm{w}(s,t,\mathrm{x}) = (\omega_1(s,t,\mathrm{x}),\omega_2(s,t,\mathrm{x}),...,\omega_n(s,t,\mathrm{x}),\ i = 1,2,..,n,\quad (s,t,\mathrm{x}) \in Q_{n+2}(T).$$

При этом использовали доказанное в [2] равенство

$$p_i(s,t,\mathrm{x}) = p_i(s,\tau,\mathrm{p}(\tau,t,\mathrm{x})),\ i = 1,2,..,n,\quad (s,t,\mathrm{x}) \in Q_{n+2}(T).$$

Докажем существование единственного решения СИУ (6), принадлежащее $\overline{C}^{\underbrace{1,1,...,1}_{раз},\underbrace{1,...,1}_{n\,раз}}([0,T]\times[0,T]\times R^{2n})$.

Для этого запишем СИУ (6) в виде

$$\theta(s,t,\mathrm{x}) = A(s,t,\mathrm{x};\theta), \tag{7}$$

где $\theta = (\theta_0^1,\theta_0^2,...,\theta_0^n,\theta_1^1,\theta_1^2,...,\theta_1^n)$ – функция переменных (s,t,x), компоненты которой есть искомые функции $\theta_0^i = p_i(s,t,\mathrm{x})$, $\theta_1^i = \omega_i(s,t,\mathrm{x}),\quad i = 1,2,...,n,$ а компоненты оператора $A = (A_0^1,A_0^2,...,A_0^n,A_1^1,A_1^2,...,A_1^n)$:

$$A_0^i\theta = x_i - \int\limits_s^t a_i(\nu,\theta_0^1(\nu,t,\mathrm{x}),...,\theta_0^n(\nu,t,\mathrm{x}),\theta_1^1(\nu,t,\mathrm{x}),...,\theta_1^n(\nu,t,\mathrm{x}))d\nu,$$

$$A_1^i\theta = \phi_i(\theta_0^1(0,t,\mathrm{x}),...,\theta_0^n(0,t,\mathrm{x})) +$$
$$+\int\limits_0^s f_i(\rho,\theta_0^1(\rho,t,\mathrm{x}),...,\theta_0^n(\rho,t,\mathrm{x}),\theta_1^1(\rho,t,\mathrm{x}),.....,.\theta_1^n(\rho,t,\mathrm{x})d\rho,$$
$$i = 1,2,...,n.$$

Обозначим $M = \max\{\max\{\|a_i\|_{Q_{n+2}(T)}T,\ \|\phi_i\|_{R^n} + \|f_i\|_{Q_{n+2}(T)}T\} : i = 1,...n\}$.

Покажем, что уравнение (7) при достаточно малом $T^* < T$ имеет в шаре $S : \rho(\theta_x,\theta) \le M$ единственное решение.

Имеем при $t \le T^* \le T$:

$$\left\|A_0^i\theta - x_i\right\| \le \left\|a_i\right\|_{Q_{n+2}(T)} T; \left\|A_1^i\theta\right\| \le \left\|\phi_i\right\| + \left\|f_i\right\|_{Q_{n+2}(T)} T, i = 1,\dots,n,$$

то есть оператор A отображает шар S в себя.

Далее,

$$\left|A_0^i\theta^1 - A_0^i\theta^2\right| \le \Omega_{0i}(T)\rho(\theta^1,\theta^2), \qquad \left|A_1{}^i\theta^1 - A_1{}^i\theta^2\right| \le \Omega_{i1}(T)\rho(\theta^1,\theta^2),$$

где $\Omega_{0i}(S) = (\sum_{k=1}^{n} L_k^i + K_k^i)S; \quad \Omega_{1i}(S) = \sum_{k=1}^{n} H_k^i S + \sum_{k=1}^{n}(M_k^i + N_k^i)S, i = 1,\dots,n,$

$$a_i(t,\mathrm{x},\mathrm{u}) \in Lip(L_1^i\big|_{x_1}, L_2^i\big|_{x_2},\dots, L_n^i\big|_{x_n}, K_1^i\big|_{u_1}, K_2^i\big|_{u_2},\dots, K_n^i\big|_{u_n}),$$

$$\phi_i(\mathrm{x}) \in Lip(H_1^i\big|_{u_1}, H_2^i\big|_{u_2},\dots, H_n^i\big|_{u_n}),\ H_j^i > 0 - const,\ i,j = 1,2,\dots,n,$$

$$f_i(t,x,u) \in Lip(M_1^i\big|_{x_1}, M_2^i\big|_{x_2},\dots, M_n^i\big|_{x_n}, N_1^i\big|_{u_1}, N_2^i\big|_{u_2},\dots, N_n^i\big|_{u_n}),$$

$M_j^i > 0 - const,\ N_j^i > 0 - const,$ i, j=1,2,…, n.

Отсюда следует, что оператор A при

$T^* = \min\{\Lambda(T;\Omega_{1i}(S):S) : j = 0,1; i = 1,\dots,n\}$

осуществляет сжатое отображение шара S на себя.

Пример. Рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(t,\mathrm{x})}{\partial t} + a(t,\mathrm{x},\mathrm{u})\dfrac{\partial u(t,\mathrm{x})}{\partial x} = a(t,\mathrm{x},u) + f(t) \\ \dfrac{\partial v(t,\mathrm{x})}{\partial t} + a(t,\mathrm{x},\mathrm{u})\dfrac{\partial v(t,\mathrm{x})}{\partial x} = g(t,\mathrm{x},u) \end{cases}, \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &u(0,x) = x, \\ &v(0,x) = \phi(x), \quad x \in R. \end{aligned} \tag{9}$$

Рассмотрим сначала первое уравнение системы (8). Это уравнение с условием (9) с помощью МДА сводится к СИУ:

$$\begin{cases} u(t,x) = x - \int_0^t a(\nu, p(\nu,t,x), u(\nu,p))d\nu + \int_0^t a(\nu, p(\nu,t,x), u(\nu,p))d\nu + \int_0^t f(s)ds, \\ p(s,t,x) = x - \int_s^t a(\nu, p(\nu,t,x), u(\nu,p))d\nu, \quad (s,t,x) \in Q_2(T). \end{cases} \tag{10}$$

Из (10) получаем: $u(t,x) = x + \int_0^t f(s)ds.$

Подставляя найденное решение во второе уравнение системы (8), затем применяя МДА, получаем решение в виде

$$v(t,x) = \phi(q(0,t,x)) + \int_0^t g(s, q(s,t,x), q(s,t,x) + \int_0^s f(\tau)d\tau)ds,$$

где $q(s,t,x)$ – решение следующего интегрального уравнения:

$$q(s,t,x) = x - \int_s^t a(v, q(v,t,x), q(v,t,x) + \int_0^v f(\tau)d\tau)dv, \quad (s,t,x) \in Q_2(T).$$

Применяя принцип сжатых отображений, доказали существование единственного решения СИУ (6), которая эквивалентна к системе (5). Мы доказали, что система (5) эквивалентна СДУ в ЧП (1) с условием (2). Следовательно, решение СДУ в ЧП (1) с условием (2) существует, и оно единственно. Полученные результаты могут быть использованы для решения других СДУ в ЧП.

Литература

1. *Иманалиев М.И.* К теории систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема / М.И. Иманалиев, С.Н. Алексеенко // Доклады АН. – 1992. – Т. 325. – № 6. – С.1111–1115.
2. *Аширбаева А.Ж.* Решение системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со многими переменными / А.Ж. Аширбаева, Ж.И. Мамбетов // Международный научно-исследовательский журнал. 2018. – № 3 (69). – С. 6–10.

А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазиаева
(Кыргызстан)

НОВЫЙ СПОСОБ СВЕДЕНИЯ ОПЕРАТОРНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА К СИСТЕМЕ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. Рассмотрено нелинейное операторно-дифференциальное уравнение гиперболического типа, в котором коэффициенты при частных производных первого порядка зависят от неизвестной функции. Для уравнения рассматривается задача Коши. Для того чтобы использовать метод дополнительного аргумента к задаче, необходимо сделать его более удобным в использовании. Предложенным в статье новым способом поставленную задачу привели в форме, удобной для использования метода дополнительного аргумента. Особенность этого метода в том, что он сводится к системе интегральных уравнений без приведения уравнения к каноническому виду. В работе получены достаточные условия существования и единственности решения начальной задачи для нелинейных операторно-дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Для иллюстрации предложенной методики показано применение к неоднородному уравнению колебания струны.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение; частные производные; гиперболический тип; дополнительный аргумент; интегральное уравнение; задача Коши.

В последнее время для решения дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка используется метод дополнительного аргумента (МДА) [1, 2]. Особенность этого метода в том, что он сводит задачу к интегральным уравнениям. Применение этого метода к уравнениям более высокого порядка актуально. В данной статье мы рассмотрели применение этого метода для уравнения второго порядка. Путем введения нескольких обозначений уравнение второго порядка свели к уравнению первого порядка. Новый способ такого применения МДА рассмотрен для следующего уравнения:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = a^2(t,x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + b(t,x,u(t,x))\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \\ + c(t,x,u(t,x))\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} + F(t,x;u), (t,x) \in G_2(T) = [0,T]\times R, \qquad (1)$$

со следующими условиями

$$u(0,x) = \phi(x) \equiv \phi_0(x), \qquad (2)$$

$$\left.\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}\right|_{t=0} = \phi_1(x), \qquad (3)$$

$F(t,x;u)$ – оператор относительно функции *u* в целом, преобразующий ее в функцию с аргументами t, x.

Обозначим $p_i(s, t, x)$, i=1,2 – соответственно решению интегральных уравнений

$$p_i(s,t,x) = x + (-1)^i \int_s^t a(\tau, p_i(\tau,t,x))d\tau\,,\ 0 \le s \le t \le T, \qquad (4)$$

$C^{(k)}(\Omega)$ – пространства функций из [3].

В статьях [1–3] рассматривался случай, когда коэффициенты при частных производных первого порядка не зависят от неизвестной функции.

Теорема. Пусть

1) $\phi_k(x) \in C_b^{(2-k)}(R)$, $k = 0,1$, $a(t,x) \in C_b^{(2)}(G_2(T))$, $b(t,x,u)$, $c(t,x,u) \in C_b^{(2)}(G_2(T)\times R)$ и вместе со своими производными удовлетворяют условию Липшица по переменной *u*.

2) оператор $F(t,x;u)$ отображает непрерывные функции в непрерывные и удовлетворяет условию Липшица:

$$\left|F(t,x;u_1) - F(t,x;u_2)\right| \le L\left\|u_1 - u_2\right\|_{C(G_2(T))}, \quad L = const.$$

Тогда существует такое $T^* > 0$, что задача (1), (2) имеет единственное решение в $\overline{C_b}^{(2)}(G_2(T^*))$.

Доказательство.

При доказательстве теоремы воспользуемся несколькими обозначениями:

$$\vartheta_i(t,x) = D[(-1)^i a(t,x)]u(t,x), \quad i = 1,2,$$

$$g_i(t,x,w) = \frac{1}{a(t,x)}[c(t,x,w) + (-1)^i(a_t(t,x) + (-1)^{i+1}a(t,x)a_x(t,x)],\ i = 1,2,$$

$$\gamma_{ij}(t,x,u) = b(t,x,u) + (-1)^{i+1} g_j(t,x,u), \quad i,j = 1,2,$$
$$\chi_i(t,x;u) = D[(-1)^{i+1} a(t,x)]\gamma_{ii}(t,x,u), \quad i = 1,2,$$
$$\lambda_i(t,x,u) = \frac{\partial \gamma_{ii}(t,x,u)}{\partial u}, \quad i = 1,2,$$

$D[\omega] = \dfrac{\partial}{\partial t} + \omega \dfrac{\partial}{\partial x}$ – дифференциальный оператор.

Задача (1)–(2) эквивалентна системе интегральных уравнений

$$u(t,x) = \phi_0(p_1(0,t,x)) + \int_0^t \vartheta_1(s, p_1(s,t,x))ds, \tag{5}$$

$$\vartheta_i(t,x) = \frac{1}{2}\varphi_i(p_i(0,t,x)) + \frac{1}{2}\gamma_{ii}(t,x,u)u + \frac{1}{2}\int_0^t \gamma_{ji}(s,p_i,u(s,p_i))\vartheta_i(s,p_i)ds -$$
$$-\frac{1}{2}\int_0^t \chi_i(s,p_i;u(s,p_i))u(s,p_i)ds - \frac{1}{2}\int_0^t \lambda_i(s,p_i,u(s,p_i))u(s,p_i)\vartheta_j(s,p_i)ds + \tag{6}$$
$$+\int_0^t F(s,p_i;u(s,p_i))ds, \; i,j = 1,2,$$

где $\varphi_i(x)$ определяется из соотношения

$$\varphi_i(x) = 2\vartheta_i(0,x) - \gamma_{ii}(0,x,u(0,x))u(0,x) = 2(\phi_1(x) + (-1)^i a(0,x)\phi_0{}'(x)) -$$
$$-\gamma_{ii}(0,x,\phi_0(x))\phi_0(x), \; i = 1,2.$$

Пусть $u(t,x)$, $\vartheta_i(t,x)$, $i = 1,2$ – решение системы интегральных уравнений (5)–(6). Непосредственным дифференцированием из (6) имеем следующее равенство:

$$D[(-1)^{i+1} a(t,x)]\vartheta_i(t,x) = \frac{1}{2}\gamma_{ii}(t,x,u)\vartheta_{3-i}(t,x) +$$
$$+\frac{1}{2}\gamma_{ji}(t,x,u)\vartheta_i(t,x) + F(t,x;u), \quad i = 1,2.$$

Отсюда получаем выполнение уравнения (1).

Таким образом, мы доказали, что первый компонент решения системы уравнений (5)–(6) удовлетворяет уравнению (1). Он же удовлетворяет и начальному условию (2).

Теперь покажем, что решение задачи (1)–(2)–(3) является решением системы интегральных уравнений (5)–(6), т. е. решение задачи (1)–(2)–(3) сводим к решению системы интегральных уравнений (5)–(6). Для этого запишем уравнение (1) в виде

$$\begin{aligned} D[(-1)^{i+1} a(t,x)]\big(2\vartheta_i(t,x) - \gamma_{ii}(t,x,u))u\big) = \gamma_{ji}(t,x,u)\vartheta_i(t,x) - \chi_i(t,x;u)u - \\ -\lambda_i(t,x,u)u(t,x)\vartheta_{3-i}(t,x) + 2F(t,x;u), \quad i = 1,2. \end{aligned} \tag{7}$$

Действительно, из (7) имеем:

$$2\left[\frac{\partial \vartheta_i(t.x)}{\partial t}+(-1)^{i+1}a(t.x)\frac{\partial \vartheta_i(t,x)}{\partial x}\right]-\lambda_i(t,x,u)\vartheta_j(t,x)u(t,x)-\chi_i(t,x;u)u(t,x)-$$

$$-\gamma_{ii}(t,x,u)\vartheta_j(t,x)=\gamma_{ji}(t,x,u)\vartheta_i(t,x)-\chi_i(t,x;u)u(t,x)-$$

$$-\lambda_i(t,x,u)\vartheta_j(t,x)u(t,x)+2F(t,x;u),\ i,j=1,2,\ i\neq j.$$

Отсюда

$$2\left[\frac{\partial \vartheta_i(t.x)}{\partial t}+(-1)^{i+1}a(t.x)\frac{\partial \vartheta_i(t,x)}{\partial x}\right]=\gamma_{ii}(t,x,u)\vartheta_j(t,x)+\gamma_{ji}(t,x,u)\vartheta_i(t,x) \qquad (8)$$

$$2\left[\frac{\partial \vartheta(t.x)}{\partial t}+a(t.x)\frac{\partial \vartheta(t,x)}{\partial x}\right]=\beta_1(t,x,u)\omega(t,x)+\beta_2(t,x,u)\vartheta(t,x)+2F(t,x;u),$$

$$i,j=1,2,\quad i\neq j.$$

Для (8) получаем:

$$2\left[\frac{\partial^2 u(t.x)}{\partial t^2}-a^2(t.x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+(-1)^i\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}D[(-1)^{i+1}a(t,x)]a(t,x)\right]=$$

$$=\left(b(t,x,u)-\frac{1}{a(t,x)}D[(-1)^{i+1}a(t,x)]a(t,x\right)\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+(-1)^{i+1}a(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)+$$

$$+\left(b(t,x,u)+\frac{1}{a(t,x)}D[(-1)^{i+1}a(t,x)]a(t,x\right)\left(\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+(-1)^{i}a(t,x)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}\right)+$$

$$+2F(t,x;u),\quad i=1,2.$$

$$2\left[\frac{\partial^2 u(t.x)}{\partial t^2}-a^2(t.x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+(-1)^i\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}D[(-1)^{i+1}a(t,x)]a(t,x)\right]=$$

$$=\left(b(t,x,u)+(-1)^{i+1}g_i(t,x,u)\right)D[(-1)^{i+1}a(t,x)]u(t,x)+$$

$$+\left(b(t,x,u)+(-1)^{i}g_i(t,x,u)\right)D[(-1)^{i}a(t,x)]u(t,x)+2F(t,x;u),\quad i=1,2.$$

Отсюда

$$2\left[\frac{\partial^2 u(t.x)}{\partial t^2}-a^2(t.x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}+(-1)^i\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}D[(-1)^{i+1}a(t,x)]a(t,x)\right]=$$

$$=\left(b(t,x,u)+(-1)^{i+1}g_i(t,x,u)\right)D[(-1)^{i+1}a(t,x)]u(t,x)+$$

$$=2b(t,x,u)\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}+2\left(c(t,x,u)+(-1)^i D[(-1)^{i+1}a(t,x)]a(t,x)\right)\frac{\partial u(t,x)}{\partial x}+2F(t,x;u),$$

$$i=1,2.$$

Таким образом, мы показали, что из (6) получается уравнение (1).

Решение задачи (3)–(2)–(3) методом дополнительного аргумента сводится к системе интегральных уравнений (5)–(6).

Мы доказали, что задача (1)–(2)–(3) эквивалентна системе интегральных уравнений (5)–(6).

Запишем систему интегральных уравнений (5)–(6) в виде одного векторного равенства

$$\theta(t,x) = A(t,x;\theta), \tag{9}$$

в котором $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ – вектор-функция переменных (t,x), компоненты которой есть искомые функции, $\theta_1 = \vartheta_1(t,x)$, $\theta_2 = \vartheta_2(t,x)$, $\theta_3 = u(t,x)$,

Здесь компоненты оператора $A = (A_1, A_2, A_3)$ определяются равенствами

$$\begin{gathered} A_i(t,x;\theta) = \frac{1}{2}\varphi_i(p_i(0,t,x)) + \frac{1}{2}\gamma_{ii}(t,x,\theta_1)\theta_1 + \\ + \frac{1}{2}\int_0^t \gamma_{ji}(s,p_i,\theta_1(s,p_i))\theta_i(s,p_i)ds - \frac{1}{2}\int_0^t \chi_{i.}(s,p_i;\theta_1(s,p_i))\theta_1(s,p_i)ds - \\ - \frac{1}{2}\int_0^t \lambda_i(s,p_i,\theta_1(s,p_i))\theta_1(s,p_i)\theta_j(s,p_i)ds + \int_0^t F(s,p_i;\theta_1(s,p_i))ds, \\ i,j = 1,2; \quad i \neq j \end{gathered} \tag{10}$$

$$A_3(t,x;\theta) = \phi_0(p_1(0,t,x)) + \int_0^t \theta_1(s,p_1(s,t,x))ds. \tag{11}$$

Покажем, что уравнение (9) имеет в области $G_2(T^*)$ при достаточно малом T^* единственное непрерывное решение. Для этого воспользуемся следующей леммой.

Лемма. Если оператор A в банаховом пространстве удовлетворяет условиям 1) $\|A(0)\| \le c = const$; 2) $\|Ax-Ay\| \le \theta \|x-y\|$, $\theta < 1$ В шаре $\|x\| \le \dfrac{c}{1-\theta}$, то он имеет в этом шаре одну неподвижную точку.

Норму в пространстве $C_b(G_2(T^*) \to R^3)$ определим равенством

$$\|\theta\|_* = \max_{(t,x)\in G_2(T^*)} \left\{ |\theta_i(t,x)|, \quad i = 1,2,3 \right\}.$$

Функции $A_1(t,x;0)$; $A_2(t,x;0)$; $A_3(t,x;0)$ являются ограниченными функциями в силу условий Теоремы.

Следовательно, $A(t,x;0)$ ограничено.

Далее, из условий Теоремы следует, что

$$\|A(\theta') - A(\theta'')\|_* \le T^* L^* \|\theta' - \theta''\|_*,$$

где L^* – некоторая константа, определяемая из норм и коэффициентов Липшица заданных функций и вольтерровского оператора в правых частях (5)–(6).

Отсюда следует справедливость теоремы.

Пример. Для иллюстрации предложенной методики покажем ее применение к неоднородному уравнению колебания струны:

$$\frac{\partial^2 u(t.x)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + f(t,x), \;\; c = const > 0 \tag{12}$$

с начальными условиями (2)–(3).

Для задачи решения интегральных уравнений (6) имеют вид

$$p_i(s,t,x) = x + (-1)^i(at - as),$$

Для (12)–(2) уравнение (2) имеет следующий вид:

$$\vartheta_1(t,x) = \frac{1}{2}\psi(p_1(0,t,x)) + \int_0^t f(s, p_1(s,t,x)ds,$$

где $\psi(x) = 2(u_t - au_x)\,|_{t=0} = 2(\phi_1(x) - a\phi_0{}^{/}(x))$.

Следовательно

$$\vartheta_1(t,x) = \phi_1(x-at) - a\phi_0\,'(x-at) + \int_0^t f(s, x-at+as)ds.$$

Из обозначения $\vartheta_1(t,x) = D[-a(t,x)]u(t,x)$ имеем

$$u(t,x) = \phi_0(x+at) + \int_0^t \phi_1(x+at-2as)ds - a\int_0^t \phi_0\,'(x+at-2as)ds +$$

$$+\int_0^t\int_0^s f(\tau, x+at-2as+a\tau)d\tau ds = \phi_0(x+at) + \int_0^t \phi_1(x+at-2as)ds +$$

$$+\frac{1}{2}\phi_0(x+at-2as)\,|_0^t = \phi_0(x+at) + \frac{1}{2}\phi_0(x-at) - \frac{1}{2}\phi_0(x+at) +$$

$$+\int_0^t \phi_1(x+at-2as)ds + \int_0^t\int_0^s f(\tau, x+at-2as+a\tau)d\tau ds =$$

$$= \begin{vmatrix} x+at-2as=\tau & \\ ds = -\dfrac{d\tau}{2a} & \\ s=0 & \tau = x+at \\ s=t & \tau = x-at \end{vmatrix} = \frac{\phi_0(a-xt)+\phi_0(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\phi_1(\tau)d\tau +$$

$$+\int_0^t\int_0^s f(\tau, x+at-2as+a\tau)d\tau ds$$

Следовательно, получаем формулу

$$u(t,x) = \frac{1}{2}\big(\phi_0(a-xt)+\phi_0(x+at)\big) + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\phi_1(\tau)d\tau + +\int_0^t\int_0^s f(\tau, x+at-2as+a\tau)d\tau ds.$$

Литература

1. *Аширбаева А.Ж.* Новый способ приведения дифференциального уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа к интегральному уравнению / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Вестник ОшГУ. – 2013. – № 1. – Спец. выпуск. – С. 87–90.
2. *Аширбаева А.Ж.* Приведение дифференциального уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа к интегральному уравнению / А.Ж. Аширбаева, Э.А. Мамазияева // Материаловедение, Бишкек. – 2013. – № 2. – С. 258–261.

3. *Аширбаева А.Ж.* Новый способ решения общего уравнения гиперболического типа / А.Ж. Аширбаева // Математическое образование. – 2018. – Вып. 3 (87). – С. 12–16.

А.М. Полатов, А.М. Икрамов, С.П. Жуманиёзов
(Узбекистан)

РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ КОМПОЗИЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Аннотация: В статье, на основе решение двумерной задачи теплопроводности методом конечных элементов, исследуется процесс теплопереноса в пластине из композиционных материалов. Для решения плоской задачи теплопроводности используются линейные треугольные конечные элементы. На основе разработанного алгоритма и программного обеспечения приводится численное решение конкретных задач и изучено распределение поля температуры. Полученные результаты сравнены с аналитическим решением. Приведены изотермы распределения температуры в неоднородной пластине с включениями. Изучается влияние концентраторов на формирование неоднородного поля температуры. Установлено, что с возрастанием времени тепловой поток обтекает включения, так как коэффициент теплопроводности включения значительно меньше теплофизических параметров основного материала. При этом наличие включений уменьшает скорость распространения теплового потока.

Ключевые слова: композиционные материалы; нестационарность; изотермы; включение; МКЭ.

Введение

Исследование процессов теплообмена в композиционных материалов является важным в развитии современных технологий и техники. Развитие авиации, атомной энергетики и ракетно-космической техники выдвигает новые постановки задач теплообмена. За последние десятилетия сфера интенсивного исследования и применения явлений теплообмена чрезвычайно расширилась. В статье, на основе решение двумерной задачи теплопроводности методом конечных элементов, исследуется процесс теплопереноса в пластинке из композиционного материала. Приведены изотермы распределения температуры в неоднородной пластине с включениями.

1. **Постановка задачи.** Для нахождения температурного поля в прямоугольной пластине решается двумерная нестационарная задача теплопроводности на основе уравнения [1]:

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial t} = K_{xx} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + K_{yy} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \tag{1}$$

где $\lambda = c\rho$ – удельная объемная теплоемкость; c – удельная теплоемкость материала; ρ – плотность; K_{xx}, K_{yy} – коэффициенты теплопроводности в соответствующих направлениях.

На верхней части пластины задан поток тепла q, а соответствующие граничные условия записываются в виде

$$K_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} + q = 0, \tag{2}$$

или постоянная температура (условие Дирихле).

По бокам пластины задаются условия симметрии (так называемые естественные граничные условия [2]):

$$\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{AD} = 0, \left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{BC} = 0. \tag{3}$$

На нижней части пластины задается постоянная температура (условие Дирихле), равная температуре окружающей среды T_∞ :

$$T\big|_{AB} = T_\infty, \tag{4}$$

или условия, определяющие конвективный обмен тепла с окружающей средой:

$$K_{yy}\frac{\partial T}{\partial y} + h\left(T - T_\infty\right) = 0, \tag{5}$$

где h – коэффициент теплообмена.

В качестве начального условия в момент времени $\mathrm{t} = 0$ задается поле температуры во всей расчетной области: $T\left(x, y, 0\right) = T^0\left(x, y\right)$.

В этом случае решение системы, состоящей из уравнения (1) и граничных условий (2)–(4), сводится к минимизации функционала [2]:

$$\left[K_{xx}\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 + K_{yy}\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + 2\lambda\frac{\partial T}{\partial t}T\right]dV + \int_{S_1} qTdS + \int_{S_2}\frac{h}{2}\left(T - T_\infty\right)^2 dS, \tag{6}$$

где S_1 – площадь поверхности, на которой задан поток тепла; S_2 – площадь поверхности, где происходит конвективный обмен тепла.

2. **Конечно-элементное решение задачи.** Для сетки конечных элементов записывается система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left[C\right]\frac{\partial\{T\}}{\partial t} + \left[K\right]\{T\} + \{F\} = 0, \tag{7}$$

где

$$\left[C\right] = \sum_e\left[c^e\right];\ \left[K\right] = \sum_e\left[k^e\right];\ \left[F\right] = \sum_e\left[f^e\right].$$

Заменяя производную по времени в уравнении (7) ее конечно-разностным аналогом, получим неявную разностную схему для решения уравнения теплопроводности методом конечных элементов [2]:

$$\left(\frac{\left[C\right]}{\Delta t} + \left[K\right]\right)\{T\}^{n+1} = \frac{\left[C\right]}{\Delta t}\{T\}^n - \{F\}^{n+1}. \tag{8}$$

Таким образом, если известен вектор температуры $\{T\}^n$ в момент времени t_n, то температура пластины в момент времени $t_{n+1} = t_n + Дt$, формируется в результате решения системы линейных алгебраических уравнений.

3. **Задача.** Начальная температура в расчетной области (рисунок 1, *а*) равна $T\left(x, y, 0\right) = 0^\circ\mathrm{C}$. На кромке AB температура равна 0 и на DC – равна 1 °С. Размер пластины $\mathrm{R} = 0{,}1$ м и $\mathrm{L} = 0{,}1$ м. На кромках AD и BC заданы условия симметрии.

В расчетах принималось, что неоднородная пластина состоит из двух материалов: основа – железо и включения из полиэтилена. Для железа принимались следующие значения

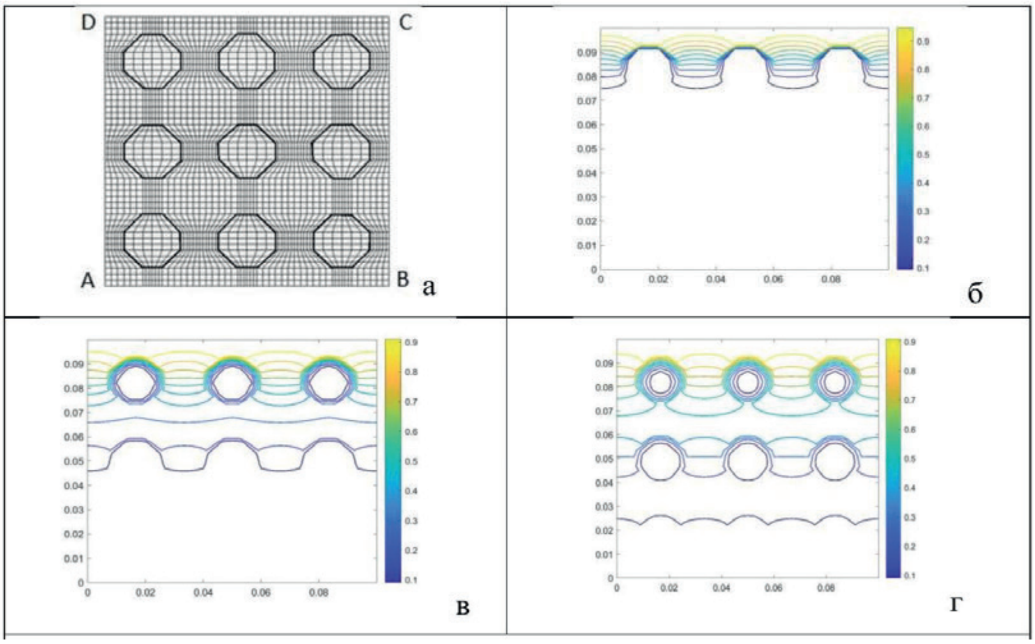


Рисунок 1 – а – Сетка конечных элементов, нанесенная на неоднородную пластину;
б–г – изотермы в неоднородной двухфазной пластине при t = 10, 40, 80 сек.

физических характеристик: удельная теплоемкость $C = 460$ Дж/(кг·К), плотность $\rho = 7800$ кг/м^3, коэффициент теплопроводности $K_{yy} = 60$ВТ / (м·К). Характеристики полиэтилена: удельная теплоемкость $C = 1257$ Дж/(кг·К), плотность $\rho = 1333$ кг/м^3, коэффициент теплопроводности $K_{yy} = 0.14$ Вт (м ·К).

На границе двух разнородных материалов выполняются условия идеального контакта, а именно: равенство температуры и тепловых потоков на линии сопряжения двух тел с различными теплофизическими характеристиками. Изотермы в неоднородной пластинке и в пластинке из однородного материала получены из решения нестационарной задачи теплопроводности (решения дифференциального уравнения в частных производных с граничными условиями Дирихле и Неймана). На рисунке 1, *б–г* приведены изотермы в неоднородной двухфазной пластине, соответствующие различным моментам времени t = 10, 40 и 80 сек.

Выводы. Исследован процесс теплопереноса в пластине, состоящей из двух различных материалов. Наличие включений изменяет картину поверхности температуры, так как теплофизические характеристики основания пластины и включения различные. С возрастанием времени тепловой поток обтекает включения. Наличие включений уменьшает скорость распространения теплового потока.

Литература

1. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 452 с.
2. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. – М.: Мир, 1979. – 392 с.

Д.С. Сафаров, С. Курбоназаров
(Таджикистан)

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

Аннотация. В работе для одной квазилинейной системы уравнений третьего порядка на комплексной плоскости найдено точное решение методом эллиптической функции Вейерштрасса.

Ключевые слова: точное решение; эллиптическая функция Вейерштрасса; модулярная функция.

На комплексной плоскости $\mathbb{C}$ рассмотрим эллиптическую систему, записанную в комплексной форме [1]

$$\frac{\partial^3 w}{\partial z \partial \overline{z}^2} + aw(z)\frac{\partial w}{\partial \overline{z}} = 0, \tag{1}$$

где $z = x + iy$, $2\partial_{\overline{z}} = \partial_x + i\partial_y$, $2\partial_{\overline{z}} = \partial_x - i\partial_{y,}$ $\partial_{\overline{z}}^2 = \partial_{\overline{z}}\left(\partial_{\overline{z}}\right)$, $a -$ постоянная $w(z) = u(x, y) + iv(x, y) -$ искомая функция.

Уравнение (1) является аналогом стационарного уравнения Картевега-де-Фриза (КдФ) на комплексной плоскости. Когда в уравнении (1) все входящие параметры являются вещественными, мы получим стационарное уравнение (КдФ) [2].

Решение уравнения (1) находим методом простых уравнений, разработанным Н.А. Кудряшовым [2], для поиска точных решений нелинейных дифференциальных уравнений.

Покажем, что при $|a| \neq 12$ решение уравнения (1) можно получить из решения дифференциального уравнения для функций Вейерштрасса [3]

$$R_u^2 - 4R^3 - bR^2 - eR - C = 0. \tag{2}$$

Общее решение уравнения (2) получается с помощью эллиптической функции Вейерштрасса, простой заменой

$$R(u) = \wp(u) - \frac{b}{12}, \tag{3}$$

$\wp(u) -$ «пе»-функция Вейерштрасса [3], удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\wp'^2(u) = 4\wp^3(u) - g_2\wp(u) - g_3, \tag{4}$$

где g_2, g_3 – инварианты и имеют вид

$$g_2 = \frac{b}{12} - e, \quad g_3 = \frac{be}{12} - c - \frac{b^3}{12^3}.$$

Действительно дважды дифференцируя (4) получим

$$\wp_{uu} = 6\wp^2(u) - g_2.$$

Отсюда при повторном дифференцировании, имеем

$$\wp_{uuu} = 12\wp(u)\wp_u. \tag{5}$$

Теперь, берем комплексного переменного u в виде

$$u = \bar{z} + qz, \quad |q| \neq 1, \tag{6}$$

тогда эта функция реализует взаимно однозначное соответствие между точками плоскости $\mathbb{C}_z$ и $\mathbb{C}_u$.

$(z, \bar{z}) \in \mathbb{C}_z \Leftrightarrow (u, \bar{u}) \in \mathbb{C}_u$.

При этом функция [4]

$$w(z) = \wp(\bar{z} + qz) = \wp(u), \tag{6'}$$

при $|q| \neq 1$ и $12q = -a$ удовлетворяет уравнению (1).

В самом деле вычисляя производные по z и $\bar{z}$ имеем

$$w_{\bar{z}\bar{z}zz} = \wp'''(\bar{z} + qz) = \wp'''(u)q,$$

$$w_{\bar{z}} = \wp'(z + q\bar{z}) \cdot (\bar{z} + qz)'_{\bar{z}} = \wp'(u).$$

Подставляя найденные производные в уравнении (1) учитывая, что $q = -\dfrac{a}{12}$ имеем

$$w_{\bar{z}\bar{z}z} + aw(z)w_z = q\wp'''(u) + a\wp(u)(\wp'(u)) = 12q\wp(u)\wp'(u) + a\wp(u)\wp'(u) = 0.$$

Теперь, чтобы построить функцию $\wp(u)$, надо по заданными инвариантами g_2, g_3 в уравнении (4) найти периоды функции $\wp(u)$ ω_1, ω_2, $Im\left(\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\right) > 0$. Для этого надо найти решение системы уравнений

$$\begin{aligned} g_2(\omega_1, \omega_2) &= 60\sum{}'(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^{-4} = \frac{b}{12} - e, \\ g_3(\omega_1, \omega_2) &= 140\sum{}'(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^{-6} = \frac{be}{12} - c - \frac{b^3}{12^3}. \end{aligned} \tag{7}$$

В теории модулярных функций [3] доказывается, что если

$$\left(\frac{b}{12} - e\right)^3 - 27\left(\frac{be}{12} - c - \frac{b^3}{216}\right)^2 \neq 0 \tag{8}$$

то система (7) имеет единственное решение ω_1, ω_2, такие, что $Im\left(\dfrac{\omega_2}{\omega_1}\right) > 0.$

Например: 1) при $g_3 = \dfrac{be}{12} - c - \dfrac{b^3}{216} = 0$, $c = \dfrac{be}{12} - \dfrac{b^3}{12^3}$ решение системы (7) получается формулами

$$\omega_1^4 = \frac{60}{b}\sum{}'(m_1 + m_2 i)^{-4}, \quad \omega_2 = \omega_1 i,$$

а решение уравнения (1) имеет вид

$$w(z)=\frac{1}{\left(\bar{z}+qz\right)^{2}}+\sum_{\tilde{\omega}\neq 0}{}'\left(\frac{1}{\left[\bar{z}+qz-\tilde{\omega}\right]^{2}}-\frac{1}{\tilde{\omega}^{2}}\right),$$

$$\tilde{\omega}=m_{1}\left(\overline{\omega}_{1}+q\omega_{1}\right)+m_{2}\left(\bar{\omega}_{2}+q\omega_{2}\right),m_{1},m_{2}=0\pm 1\pm 2,\dots\ ,$$

$$\tilde{\omega}=m_{1}\tilde{\omega}_{1}+m_{2}\tilde{\omega}_{2},\ \tilde{\omega}_{1}=\left(\overline{\omega}_{1}+q\tilde{\omega}_{1}\right),\ \tilde{\omega}_{2}=\left(\overline{\omega}_{2}+q\tilde{\omega}_{2}\right),\ m_{1},m_{2}=0\pm 1\pm 2\pm 3,\dots\ .$$

Литература

1. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных / А.В. Бицадзе. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
2. *Kudryashov N.A.* Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations / N.A. Kudryashov // Department of Applied Mathematics Moscow Engineering and Physics Institute. – Moscow. V. 1. – 4 Jun, 2004. – P. 21–25.
3. *Гурвиц А.* Теория функций / А. Гурвиц, Р. Курант. – М.: Наука, 1968. – 648 с.
4. *Сафаров Д.С.* Двоякопериодические обобщенные аналитические функции и их приложения / Д.С. Сафаров. – Душанбе: Дониш, 2012. – 190 с.

У.А. Сопуев, Б.Ш. Нуранов
(Кыргызстан)

О КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С МЛАДШИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Аннотация. Доказаны существование и единственность решения краевой задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа третьего порядка с младшими коэффициентами. Особенность данной задачи заключается в том, что смешанный параболо-гиперболический оператор применяется к обыкновенному дифференциальному оператору по переменной *y*. Методом понижения порядка рассматриваемая задача сводится к задаче Гурса для уравнения гиперболического типа в характеристическом прямоугольнике и к первой краевой задаче для уравнения параболического типа в прямоугольнике. Разрешимость задачи сводится к разрешимости интегрального уравнения Фредгольма второго рода. После определения следа функции и её производной по *y*, решение задачи полностью определяется в рассматриваемых областях.

Ключевые слова: краевые задачи; существование; единственность; функции Грина; интегральное уравнение; резольвента; метод понижения.

Пусть $D_{1}=\left\{(x,y):0<x<\ell,\ 0<y<h\right\}$, $D_{2}=\left\{(x,y):0<x<\ell,-h_{1}<y<0\right\}$, а $D=D_{1}\cup D_{2}$. Через C^{n+m} обозначим класс функций, имеющих все производные $\partial^{r+s}/\partial x^{r}\partial y^{s}\ (r=0,1,\dots,n,\ s=0,1,\dots,m)$.

В области D рассмотрим уравнение третьего порядка

$$L\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)u=0, \tag{1}$$

где $L \equiv \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} - \dfrac{\partial}{\partial y} + c_1(x,y), \ y > 0, \\ \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c_2(x,y), \ y < 0, \end{cases}$ $c_1, \ c_2$ – заданные функции.

Отметим, что оператор L представляет собой смешанный параболо-гиперболический оператор с линией изменения типа $y = 0$ [1]. Прямая $y = const$ является двукратной характеристикой, а $x = const$ – однократной характеристикой уравнения (1) при y > 0. Прямая $y = const$ является однократной характеристикой, а $x = const$ – двукратной характеристикой уравнения (1) при y < 0 [2].

Задача 1. Найти функцию $u(x,y) \in C\left(\overline{D}\right) \cap C^2\left(D\right) \cap C^{3+2}\left(D\right)$, удовлетворяющую в области D уравнению (1) и краевым условиям:

$$u(0,y) = \varphi_1(y), u(\ell, y) = \varphi_2(y), 0 \le y \le h,$$

$$u(0,y) = \varphi_3(y), \ -h_1 \le y \le 0, \ u(x,-h_1) = \psi(x), \ 0 \le \ x \le \ell,$$

где $\varphi_i(y) \, (i = \overline{1,3}), \ \psi(x)$ – заданные функции, причем

$$\varphi_1(y), \varphi_2(y) \in C^2[0,h], \varphi_3(y) \in C^1[0,h], \psi(x) \in C^1[0,\ell],$$

$$\varphi_1(0) = \varphi_3(0), \psi_1'(0) = \psi_3'(0), \varphi_1''(0) = \psi_3''(0), \varphi_3(-h_1) = \varphi(0).$$

Коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют следующим условиям:

$$c_1(x,y) \in C\left(\overline{D_1}\right), \ c_2(x,y) \in C\left(\overline{D_2}\right).$$

Задача 1 при $c_1(x,y) \equiv 0, \ c_2(x,y) = c,$ где $c - const,$ изучена в работе [3].

Из постановки задачи 1 вытекают следующие условия склеивания на линии $y = 0$.

$$u(x,-0) = u(x,+0) = \tau(x), \ u_y(x,-0) = u_y(x,+0) = \nu(x), \ 0 \le x \le \ell,$$

$$u_{yy}(x,-0) = u_{yy}(x,+0) = \mu(x), 0 \le x \le \ell,$$

где $\tau(x), \ \nu(x), \ \mu(x)$ – пока неизвестные функции.

Пусть

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \vartheta(x,y), \ (x,y) \in D,$$

где $\vartheta(x,y)$ – новая неизвестная функция. Тогда, из уравнения (1) имеем

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + c_1(x,y)\vartheta = 0, \ (x,y) \in D_1, \tag{2}$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x \partial y} + c_2(x,y)\vartheta = 0, \ (x,y) \in D_2. \tag{3}$$

Из условия склеивания (8) получим

$$\vartheta(x,-0) = \vartheta(x,+0) = \nu(x), \ 0 \le x \le \ell,$$

$$\vartheta_y(x,-0) = \vartheta_y(x,+0) = \mu(x),\ 0 \le x \le \ell.$$

Тогда для определения $\vartheta(x,y)$ в области D придем к следующим задачам.

Задача 2. Найти в области D_2 решение уравнение (3), удовлетворяя условиям

$$\vartheta(0,y) = \varphi_3'(y),\ \ 0 \le y \le h,\ \ \vartheta(x,-0) = \nu(x), 0 \le x \le \ell,$$

причем

$$\varphi_3(0) = \nu(0).$$

Задача 3. Найти в области D_1 решение уравнения (2), удовлетворяющее условиям

$$\vartheta(0,y) = \varphi_1'(y),\ \vartheta(\ell,y) = \varphi_2'(y),\ 0 \le y \le h,\ \vartheta(x,0) = \nu(y),\ 0 \le x \le \ell,$$

причем

$$\nu(0) = \varphi_1'(0),\ \ \nu(\ell) = \varphi_2'(0).$$

Методом понижения порядка уравнений [4, 5] рассматриваемая задача сводится к задаче Гурса для уравнения гиперболического типа в характеристическом прямоугольнике и к первой краевой задаче для уравнения параболического типа в прямоугольнике.

Разрешимость задачи сведена к разрешимости интегрального уравнения Фредгольма второго рода относительно $\nu(x)$. После определения на отрезке [0, ℓ] следа функции и её производной по *y*, решения задач 2, 3 и 1 однозначно определяются в рассматриваемых областях.

Аналогично исследуется

Задача 4. Найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую всем условиям задачи 1, если вместо условия $u\big|_{x=0} = \varphi_3(y),\ -h_1 \le y \le 0$ берется условие $u\big|_{x=\ell} = \varphi_4(y),\ -h_1 \le y \le 0.$

Литература

1. *Джураев Т.Д.* Краевые задачи для уравнения смешанно-составного типа / Т.Д. Джураев. – Ташкент: Фан, 1973. – 240 с.
2. *Джураев Т.Д.* Классификация и приведение к каноническому виду уравнения с частными производными третьего порядка / Т.Д. Джураев, Я.О. Попёлок // Дифференциальное уравнение. – 1991. – Т. 27. – № 10. – С. 1734–1745.
3. *Сопуев А.* Краевые задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа третьего порядка / А. Сопуев, Б.Ш. Нуранов // Вестник Ошского государственного университета. – 2021. – № 2. – С. 93–101.
4. *Джураев Т.Д.* Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа / Т.Д. Джураев, А. Сопуев, М. Мамажанов. – Ташкент: Фан, 1986. – 220 с.
5. *Джураев Т.Д.* К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвёртого порядка / Т.Д. Джураев, А. Сопуев. – Ташкент: Фан, 2000. – 144 с.

Ж.Н. Тасмамбетов, Ж.К. Убаева
(Казахстан)

ИЗУЧЕНИЕ ОСОБЕННОСТИ ПОСТРОЕНИЯ РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ ТИПА КЛАУЗЕНА

Аннотация. Показаны особенности построения метода неопределенных коэффициентов к построению частных решений уравнения Клаузена. Исследованы особенности построения общего решения основной вырожденной неоднородной системы Клаузена. Получены четыре новых функции, представляющие частные решения неоднородного уравнения и систем типа Клаузена.

Ключевые слова: уравнения Клаузена; система типа Клаузена; регулярное; особые точки; особенности; система.

Введение. Во многих приложениях в зависимости от вида правой части и соотношений между индексом, а также показателем степени применяются функции Ломмеля, Струве, Ангера и Вебера [1, 2]. Они являются частными решениями неоднородного уравнения Бесселя. Следует отметить, что задачи сводятся к интегрированию неоднородных уравнений Бесселя в тех случаях, когда имеются источники, распределенные по объему. Неоднородные уравнения гипергеометрического типа изучены в монографии Бэбистра [3], однако эти идеи не распространены на системы типа Клаузена.

Изучение решений уравнений и систем типа Клаузена стали актуальными в связи с изучением их свойств при исследовании многомерных вырожденных уравнений. Так, при решении дифференциальных уравнений с одной линией вырождения

$$Lu = y^m Uxxx - Uyyy = 0,\ m = const > 0, \text{ в области } \Omega = \{(x, y): -\infty < x < +\infty,\ y > 0\}$$

используются свойства решения уравнения Клаузена [4].

Свойства решений вырожденных гипергеометрических систем Клаузена активно используются при построении решений многомерного вырожденного уравнения третьего порядка с тремя независимыми переменными вида $Lu = x^n y^n Ut - t^k y^m Uxx - t^k y^n Uyyy = 0$, $m, n, k = const > 0$, в области $\Omega = \{(x, y, t): x > 0, y > 0, t > 0\}$ [2] является уравнением с тремя линиями вырождения. Поэтому определенный интерес представляет изучение систем типа Клаузена.

Об особенностях решения неоднородных вырожденных систем Горна и Клаузена.

Неоднородные вырожденные системы Горна

Постановка задачи. Исследуются особенности построения решений вблизи особенности (0,0) регулярной однородной системы, состоящей из двух дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка вида

$$\sum_{j+k=0}^{j+k=o+1}\left(r_{j,k}-\alpha_{j,k}x^h\right)x^j y^k p_{j,k} = f_1\left(x,y\right),$$
$$\sum_{j+k=0}^{j+k=m+1}\left(t_{j,k}-\beta_{j,k}y^h\right)x^j y^k p_{j,k} = f_2\left(x,y\right)$$

где $p_{0,0}\left(x,y\right)=Z\left(x,y\right)\left(j=0,k=0\right)$ общая неизвестная для двух уравнений системы, через $p_{j,k}$ обозначены различные порядки частных производных неизвестной функции $Z(x, y)$. Порядок зависит от значения ω. Если ω = 1, то получим системы второго порядка. $f_k(x, y)(k=1,2)$ – многочлены или обобщенные степенные ряды двух переменных.

Наиболее исследован случай $h = 1$. Я. Горн доказал, что все 34 известные гипергеометрические функции, в частности четыре гипергеометрические функции двух переменных П. Аппеля F_1–F_4, являются решениями частных случаев таких систем.

Теорема 2.1. Неоднородная система Горна

$$xZ_{xx} + (\gamma - x) Z_x - yZ_y - \alpha Z = x^{\rho_1 - 1} y^{\rho_2} \alpha_{0,0}^{(1)},$$
$$yZ_{yy} + (\gamma' - y) Z_y - xZ_x - \alpha Z = x^{\rho_1} y^{\rho_2 - 1} \alpha_{0,0}^{(2)},$$

где γ ,γ ,α – параметры, $\rho_k (k = 1,2)$ – некоторые постоянные, имеет частное решение вида

$$Z_{\rho_1,\rho_2}(x,y) = x^{\rho_1} y^{\rho_2} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\rho_1 + \rho_2 + \alpha)_{m+n}}{[\rho_1]_{m+1} [\rho_1 - 1 + \gamma]_{m+1} [\rho_2]_{m+1} [\rho_2]_{n+1} [\rho_2 - 1 + \gamma]_{n+1}} x^m y^n.$$

Решение ищем в виде обобщенного степенного ряда двух переменных

$$Z(x,y) = x^{\lambda_1} y^{\lambda_2} \sum_{m,n=0}^{\infty} A_{m,n} x^m y^n, A_{0,0} \neq 0$$

методом Фробениуса – Латышевой. Свойства этой системы применяются при изучении параболических уравнений с двумя линиями вырождения [4]. При $\omega = 2$ из (2.1) получим системы третьего порядка. Наиболее интересными из них являются системы типа Клаузена, в частности вырожденные системы Клаузена с неоднородной правой частью.

Частное решение вырожденной неоднородной системы Клаузена

Теорема 2.2.

Обобщенная вырожденная гипергеометрическая функция Клаузена

$$Z_1(x,y) = F\left(\begin{matrix} -, & -, & - \\ \delta, & \delta', & \gamma \end{matrix} \middle| \, x,y \right) = \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{(\delta)_m (\delta')_n (\gamma)_{m+n}} \frac{x^m}{m!} \frac{x^n}{n!}$$

является частным решением однородной системы

$$x^2 p_{30} + xyp_{21} + (\gamma + \delta + 1) xp_{20} + \delta yp_{11} + \gamma\delta p_{10} - p_{00} = 0,$$
$$y^2 p_{03} + xyp_{12} + (\gamma + \delta' + 1) yp_{02} + \delta xp_{11} + \gamma\delta' p_{01} - p_{00} = 0,$$

полученной путем предельного перехода из основной системы Клаузена [5]. Общее решение данной системы было построено в работе [6] методом Фробениуса – Латышевой. Теперь построим частное решение неоднородной системы.

Теорема 2.3. Неоднородная вырожденная гипергеометрическая система Клаузена

$$x^2 p_{30} + xyp_{21} + (\gamma + \delta + 1) xp_{20} + \delta yp_{11} + \gamma\delta p_{10} - p_{00} = f_1(x,y),$$
$$y^2 p_{03} + xyp_{12} + (\gamma + \delta' + 1) yp_{02} + \delta' xp_{11} + \gamma\delta' p_{01} - p_{00} = f_2(x,y),$$

с правой частью

$$f_1(x,y) = \frac{x^\rho y^\sigma}{(\sigma + 1)(\sigma + \delta')(\sigma + \gamma)(\sigma - \delta + \gamma + 1)},$$

$$f_2(x,y) = \frac{x^\rho y^\sigma}{(\rho + 1)(\rho + \delta)(\rho + \gamma)(\rho - \delta' + \gamma + 1)},$$

имеет частное решение вида

$$K_{\rho,\sigma}\begin{pmatrix} * & & \\ \delta, & \delta, & \gamma \end{pmatrix} = x^{\rho+1}y^{\sigma+1}.$$

$$\cdot\sum\nolimits_{m,n=0}^{\infty}\frac{x^m y^n}{(\rho+1)_m(\rho+\delta)_m(\rho+\gamma)_m(\rho-\delta'+\gamma+1)_m(\sigma+1)_n(\sigma+\delta^3)_n(\sigma+\gamma)_n(\sigma-\delta+\gamma+1)_n}\times$$

$$\times\frac{x^m y^n}{m!n!}.$$

Таким образом, в данной работе были изучены возможности построения решений неоднородного вырожденного гипергеометрического уравнения третьего порядка и неоднородных систем типа Клаузена, состоящих из двух дифференциальных уравнений в частных производных второго и третьего порядка.

Литература

1. *Watson G.N.* Theory of Bessel functions. – New York: Cambridge U.P., 1944.
2. *Korenev B.G.* Introduction to the theory of Bessel functions. Moscow: «Nauka», 1971.
3. *Babister A.W.* Trancendental function satisfying nonhomogeneous linear dierential equations. New York, London, 1967.
4. *Hasanov A.,* Choi Junesang. Note on Euler-Bernoulli Equation // Sohag J. Math. 7 (2), (2020): p. 33–36.
5. *Appell P., Kampe de Feriet J.* Fonctions Hypergeometriques et Hyperspheriques. Paris: Polynomes d'Hermite, Gauthier-Villars, 1926.
6. *Тасмамбетов Ж.Н.* Построение нормальных и нормально-регулярных решений специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка / Ж.Н. Тасмамбетов. – Актобе: ИП Жандилдаева С.Т., 2015. – 464 с.

Ж.Н. Тасмамбетов, А.А. Исенова
(Республика Казахстан)

МНОГОМЕРНЫЕ НОРМАЛЬНО-РЕГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДЕННЫХ СИСТЕМ, ПОЛУЧЕННЫХ ИЗ СИСТЕМ ЛАУРИЧЕЛЛЫ

Аннотация. В работе изучены возможности построения нормально-регулярных решений вырожденных систем, полученных из систем Лауричеллы путем предельного перехода. Исследован ряд важных частных случаев систем, с решениями в виде нормально-регулярных решений. Доказаны некоторые свойства таких рядов, установлена связь этих рядов с вновь введенными функциями В.И. Художникова.

Ключевые слова: связь; свойства; нормально-регулярные решения; гипергеометрическая функция; система Горна, Лауричеллы.

1. Введение. Специальные вопросы аналитической теории дифференциальных уравнений, а именно: существование нормально-регулярных решений и их применение к решению задач теории волноводов и теории колебаний были рассмотрены в монографии [1].

Все известные специальные функции являются частными случаями нормально-регулярных решений. Это понятие распространено на случай функций многих переменных [2, 3].

Определение 1.1. Решение вида

$$w(z_1,\dots,z_n) =$$
$$= \exp(\alpha_{\underbrace{1,0,\dots,0}_{n}} z_1 + \dots + \alpha_{\underbrace{0,\dots,1}_{n}} z_n) z_1^{\rho_1} \cdot \dots \cdot z_n^{\rho_n} \sum_{m_1,\dots,m_n=0}^{\infty} A_{m_1,\dots,m_n} z_1^{m_1} \cdot \dots \cdot z_n^{m_n},\ A_{\underbrace{0,\dots,0}_{n}} \neq 0$$

где $\rho_t(t=\overline{1,n}), A_{m_1,\dots,m_n}(m_1,\dots,m_n = 0,1,2,\dots);$ $\alpha_{\underbrace{1,0,\dots,0}_{n}},\dots,\alpha_{\underbrace{0,\dots,0,1}_{n}}$ – неизвестные постоянные, а ряд в правой части сходится вблизи особенности ($z_1 = 0, z_2 = 0,\dots, z_n = 0$) и называется нормально-регулярным решением n переменных.

Целью данной работы является изучение возможности построения нормально-регулярных решений вырожденных систем, полученных из систем Лауричеллы F_D решением, которой является функция Лауричеллы.

Исследуется ряд важных частных случаев систем с решениями в виде нормально-регулярных решений, установлены необходимые и достаточные условия их существования, доказательство ряда свойств, связанных с функциями Горна двух и более переменных.

2. Вырожденные системы, полученные из системы Лауричеллы (F_D)

В.И. Художников, совершая предельные переходы по параметру β_i в последних $n-k$ уравнениях системы Лауричеллы, представил её в виде следующей вырожденной гипергеометрической системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}(1-z_i)\sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial^2 w}{\partial z_j \partial z_i} + \left[\gamma - (\alpha+\beta_i+1) z_i\right]\frac{\partial w}{\partial z_i} - \beta_i \sum_{j=1, j\neq i}^{n} z_j \frac{\partial w}{\partial z_j} - \alpha\beta_i w = 0,\ i=\overline{1,k},\\ \sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial^2 w}{\partial z_j \partial z_i} + \left[\gamma - z_i\right]\frac{\partial w}{\partial z_i} - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} z_j \frac{\partial w}{\partial z_j} - \alpha w = 0,\ i=\overline{k+1,n}\end{gathered} \tag{2.1}$$

Решением этой системы является введенная им функция [1]:

$$\Phi_D\left(\begin{matrix}\alpha, (\beta_k)\\ \gamma\end{matrix}\middle|(z_{k+1})\right) = \sum_{i_1,\dots,i_{k+1}} \frac{(\alpha)_{\sum i_{k+1}} \prod (\beta_k) i_k}{(\gamma)_{\sum i_{k+1}}} \cdot \prod \frac{(z_{k+1})^{i_{k+1}}}{i_{k+1}!}. \tag{2.2}$$

Предметом нашего дальнейшего исследования будут построения нормально-регулярных решений системы (2.1) и её частных случаев, установление связи между функцией Художникова (2.2) и вновь построенных нормально-регулярных решений, а также изучение их различных свойств.

2.1. Нормально-регулярные решения вырожденной системы Горна (Φ_1) и некоторые его свойства

Теорема 2.1. Система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

$$\begin{cases} z_1(1-z_1) w_{z_1z_1} + z_2(1-z_1) w_{z_1z_2} + \left[\gamma - (\alpha+\beta_1+1) z_1\right] w_{z_1} - \beta_1 z_2 w_{z_2} - \alpha\beta_1 w = 0,\\ z_2 w_{z_2z_2} + z_1 w_{z_1z_2} + (\gamma - z_2) w_{z_2} - z_1 w_{z_1} - \alpha w = 0 \end{cases}, \tag{2.3}$$

полученная из (2.1) при n = 2 имеет три линейно-независимых частных решений, одним из которых является вырожденная гипергеометрическая функция Гумберта

$$\Phi_1\left(\alpha,\beta;\gamma;z_1,z_2\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\left(\alpha,m+n\right)\left(\beta,m\right)}{\left(\gamma,m+n\right)}\frac{z_1{}^m}{\left(1,m\right)}\frac{z_2{}^n}{\left(1,n\right)} \tag{2.4}$$

и имеет только одно нормально-регулярное решение вида

$$w_4\left(z_1,z_2\right)=e^{z_2}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\left(\alpha\right)_m\left(\beta\right)_m\left(\gamma-a\right)_n}{\left(\gamma\right)_{m+n}}\frac{z_1^m}{m!}\frac{\left(-z_2\right)^n}{n!}. \tag{2.5}$$

Сформулируем некоторые свойства функций Гумберта Φ_1, где устанавливается связь между функцией Гумберта Φ_1 и нормально-регулярным решением системы (2.3).

Теорема 2.3. Справедливы соотношения

$$\Phi_1\left(\alpha,\beta;\gamma;z_1,z_2\right)=e^{z_2}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\left(\alpha\right)_m\left(\beta\right)_m\left(\gamma-a\right)_n}{\left(\gamma\right)_{m+n}}\frac{z_1^m}{m!}\frac{\left(-z_2\right)^n}{n!} \tag{2.6}$$

$$\begin{aligned}&\Phi_1\left(\alpha,\beta;\gamma;z_1,z_2\right)=\\&=e^{z_2}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\left(\alpha\right)_m\left(\beta\right)_m\left(\gamma-a\right)_n}{\left(\gamma\right)_{m+n}}\frac{z_1^m}{m!}\frac{\left(-z_2\right)^n}{n!}=e^{z_2}\Xi_1\left(\alpha,\gamma-\alpha,\beta_1;\gamma;z_1-z_2\right)\end{aligned} \tag{2.7}$$

$$e^{-z_2}\Phi_1\left(\alpha,\beta;\gamma;z_1,z_2\right)=\Xi_1\left(\alpha,\gamma-\alpha,\beta_1;\gamma;z_1-z_2\right) \tag{2.8}$$

$$\Phi_1\left(\gamma-\alpha-\beta_1,\beta_1;\gamma;-z_1,z_2-z_1\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\left(\gamma-\alpha-\beta_1\right)_m\left(\beta_1\right)_n\left(\gamma-a\right)_n}{\left(\gamma\right)_{m+n}}\frac{\left(-z_1\right)^m}{m!}\frac{\left(z_2-z_1\right)^n}{n!} \tag{2.9}$$

$$\Phi_1\left(\alpha,\gamma-\alpha-\beta_1;\gamma;z_1-z_2,-z_2\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{\left(\alpha\right)_m\left(\gamma-\alpha-\beta_1\right)_m}{\left(\gamma\right)_{m+n}}\frac{\left(z_1-z_2\right)^m}{m!}\frac{\left(-z_2\right)^n}{n!} \tag{2.10}$$

В (2.9) и (2.10) введены две новые функции.

3. Свойства нормально-регулярных решений наиболее общей вырожденной системы

Вырожденная гипергеометрическая система дифференциальных уравнений в частных производных

$$\left(1-z_i\right)\sum_{i=1}^{k}z_j\frac{\partial^2 w}{\partial z_j\partial z_i}+\left[\gamma-\left(\alpha+\beta_i+1\right)z_i\right]\frac{\partial w}{\partial z_i}-\beta_i\sum_{i=1,j\neq i}^{k}z_j\frac{\partial w}{\partial z_j}-\alpha\beta_i w=0,$$

$$\sum_{i=1}^{n}z_j\frac{\partial^2 w}{\partial z_j\partial z_i}+\left(\gamma-z_i\right)\frac{\partial w}{\partial z_i}-\sum_{i=1,j\neq i}^{k}z_j\frac{\partial w}{\partial z_j}-\alpha w=0,\ i=\overline{k+1,n};i=\overline{1,k}. \tag{3.1}$$

были получены В.И. Художниковым из системы Лауричеллы (1.2) с помощью предельного перехода по параметру β_i в последних $n-k$ уравнениях. Изучая систему (3.1) он ввёл вырожденную функцию Φ_D – (2.2) как частный случай решения системы Лауричеллы F_D.

Изучим возможности построения нормально-регулярных решений наиболее общей системы, которая состоит из n уравнений, из них последние $n-k$ уравнений, полученные путём предельного перехода из системы (1.2). Введенное В.И. Художниковым решение (2.2) можно представить в виде

$$\Phi_D\left(\frac{\alpha,\beta_1}{\gamma}/(z_n)\right)=\sum_{m_1,\dots,m_n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m_1+\dots+m_n}(\beta_1)_{m_1}}{(\gamma)_{m_1+\dots+m_n}}\cdot\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\cdot\dots\frac{z_1^{m_n}}{m_n!}. \tag{3.2}$$

Обобщение результатов пункта 2 позволяет нам сформулировать общую теорему относительно существования нормально-регулярных решений системы (3.1).

Теорема 3.1. Вырожденная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (3.1) имеет $n-1$ нормально-регулярных решений вида

$$w_1(z_1,z_2,\dots,z_n)=e^{z_2}\sum_{m_1,m_2,\dots,m_n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m_1+m_2+\dots+m_n}(\beta_1)_{m_1}(\gamma-\alpha)_{m_2}}{(\gamma)_{m_1+m_2+\dots+m_n}}\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\frac{(-z_2)^{m_2}}{m_2!}\frac{z_3^{m_3}}{m_3!}\dots\frac{z_n^{m_n}}{m_n!},$$

....

$$w_{n-1}(z_1,z_2,\dots,z_n)=e^{z_n}\sum_{m_1,m_2,\dots,m_n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m_1+m_2+\dots+m_n}(\beta_1)_{m_1}(\gamma-\alpha)_{m_{n-1}}}{(\gamma)_{m_1+m_2+\dots+m_n}}\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\dots\frac{(-z_n)^{m_n}}{m_n!} \tag{3.3}$$

а также справедливы соотношения

$$\Phi_D\left(\frac{\alpha,\beta_1}{\gamma}/(z_n)\right)=e^{z_2}\Xi_D(\alpha,\gamma-\alpha,\beta_1;\gamma;z_1,-z_2,z_3,\dots,z_n),$$

.... (3.4)

$$\Phi_D\left(\frac{\alpha,\beta_n}{\gamma}/(z_n)\right)=e^{z_n}\Xi_D(\alpha,\gamma-\alpha,\beta_1;\gamma;z_1,\dots,z_{n-1},-z_n).$$

Таким образом, нормально-регулярные решения наиболее общей вырожденной системы (3.1) представляются в виде (3.3). Соотношения (3.4) являются обобщениями формул (2.6)–(2.10).

Использованная литература

1. *Латышева К.Я.* Нормально-регулярные решения и их приложения / К.Я. Латышева, Н.И. Терещенко, Г.С. Орел. – Киев: Вища школа, 1974. – 135 с.
2. *Zh. Tasmambetov*. Construction of normal and normally-regular solutions of special systems of partial equations of second order. – Aktobe, 2015.
3. *A. Issenova, Zh. Tasmambetov, N. Rajabov.* On general properties of degenerate systems of second order partial differential equations of hypergeometric type // European journal of pure and applied mathematics, vol. 14, No. 3, 2021, 1024-1043. ISSN 1307-5543 – ejpam.com.
4. *V.Y. Khudozhnikov*. Two new degenerated hypergeometric functions of many variables and integral equations with them // Diff. equations, 2003, vol. 39, № 6, p. 835–843.

Ж.К. Туркманов, А.С. Агыбаев, А.Р. Алиева
(Кыргызстан)

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОСОБОЙ ТОЧКОЙ

Аннотация. Сингулярно возмущенные уравнения условно можно делить на два класса. К первому классу можно отнести сингулярно возмущенные уравнения с малым параметром при старшей производной или уравнения типа Прандтля – Тихонова. Ко второму классу относятся возмущенные уравнения типа Лайтхилла. Это такие возмущенные уравнения, что при нулевом значении малого параметра свой наивысший порядок производной сохраняют, однако содержат особую точку (в данной работе – на левом конце области определения). В данной статье изучаются асимптотические поведения решения этих уравнений включительно до особой точки и излагается метод униформизации.

Ключевые слова: сингулярно возмущенное уравнение; невозмущенная задача; особая точка; метод малого параметра; интегральное уравнение; множество; мажорантное уравнение; отображает шар в себя; неравенства.

Введение. Для построения асимптотики решений сингулярно возмущенных уравнений были созданы следующие аналитические методы: метод структурного сращивания (развитие метода сращивания Ван-Дайка) [1, 2], метод погранфункций, метод униформизации (развитие метода Лайтхилла), метод усреднения, метод регуляризации Ломова, метод разных масштабов. Метод погранфункций и метод униформизации в современной трактовке был создан усилиями М.И. Вишика и Л.А. Люстерника, М.И. Иманалиева, К. Алымкулова, А.Б. Васильевой и обычно применяется для построения асимптотики решений сингулярно возмущенных уравнений в случае экспоненциальной асимптотической устойчивости решения уравнения в быстрой переменной, т. е. выполнении условия теоремы А.Н. Тихонова. В данной статье изучаются асимптотические поведения решения этих уравнений включительно до особой точки и излагается метод униформизации.

Постановка задачи. Рассматриваем задачу Коши

$$Lu_c := \left(x^\alpha + \varepsilon a(x)u^p(x)\right)u'(x) + q(x)u(x) = g(x) + \varepsilon b(x)u^r(x), \quad (1)$$

$$u(1) = u^o \quad (2)$$

где $0 \prec \varepsilon \ll 1$ – малый параметр, u^o – заданная постоянная, r, p – натуральные числа; $r \le p-1$.

На известные функции налагаются следующие условия (U):

$$a(x),\ b(x),\ g(x) \in C^{(1)}[0,1],\ q(x) \in C^{(2)}[0,1],\ q(0) \equiv a \succ 0,\ q'(0) = b \le 0.$$

Возникают вопросы: 1) существует ли решение задачи (1)–(2) на отрезке $[0,1]$?; 2) если существует, то можно ли получить равномерно пригодное решение на всем отрезке $[0,1]$? Отметим, что случай $0 \prec \alpha \le 1$ рассматривались в [1, 2].

Невозмущенная задача $(\varepsilon = 0)$ при $\alpha = 2$ соответствующая задаче (1)–(2) имеет вид

$$Lu_0 := x^2 u_0'(x) + q(x)u_0(x) = g(x),\ u_0(1) = u^0, \quad (3)$$

имеет решение, представимое в виде

$$u_0(x) = x^b \exp\left(ax^{-1}\right) w(x), \tag{4}$$

где $w(x) = P(x)\left[u^0 + \int_1^x p^{-1}(s)e^{-as^{-1}} \cdot s^{-b-2} r(s)ds\right]$, $P(x) = \exp\left\{\int_1^x s^{-2}\left[a + bs - q(s)\right]ds\right\}$.

Очевидно, что $w(x) \in C^{(1)}[0,1]$.

Теорема 1. Пусть 1) выполнено условие (U); 2) $W(0) \equiv C \neq 0$; $a(0) \equiv a_0 \neq 0$. Тогда задача (1)–(2) имеет единственное решение, представимое в виде

$$u(x,\varepsilon) = u_0(x) + \varepsilon u_1(x) + \varepsilon^2 u_2(x) + \dots, \tag{5}$$

которое сходится на отрезке $[\overline{x}_\varepsilon, 1]$, где $\overline{x}_\varepsilon$ – малое положительное число.

Доказательство. Подставляя (5) в (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем следующие уравнения;

$$Lu_1 := -a(x)u_0^p(x)u_0(x) + b(x)u_0^2(x),\ u_1(1) = 0, \tag{5.1}$$

$$Lu_2 := -a(x)u_0^p(x)u_1^{'}(x) - pau_0^{p-1}(x)u_1(x)u_0^{'}(x) + rb(x)u_0^{r-1}(x)u_1(x),\ u_2(1) = 0, \tag{5.2}$$

Очевидно, что из этих уравнений единственным образом определяются неизвестные функции $u_j(x)$ ($j = 1,2,\dots$). Теперь докажем, что формальное решение (5) сходится на отрезке $[\overline{x}_\varepsilon, 1]$. Из (1) переходим к интегральному уравнению

$$u(x) = u_0(x) + x^b e^{ax^{-1}} \int_1^x P(x-s)e^{-as^{-1}} s^{-b-2} \frac{\left(\varepsilon s^2 b(s)u^r(s) + \varepsilon(q(s)u(s) - q(s))\right)}{\left(s^2 + \varepsilon a(s)u^p(s)\right)} ds. \tag{6}$$

Пусть $N \geq 1$ – мажоранта норм известных функций и их производных, содержащихся в (6).

Оценивая (6), получаем мажорантное уравнение

$$Z(x) = Nx^b e^{ax-1} + 6N^3 \varepsilon x^{-2} z^{p+1}(x) := T_0 z, \tag{7}$$

где $|u(x)| \leq z(x)$. Пусть $\overline{\omega}_\varepsilon$ – решение уравнение

$$12N^3(p+1)(2N)^p x_\varepsilon^{-pb-2} \cdot e^{ap/\overline{x}_\varepsilon} = 1,\ \overline{x}_\varepsilon = ap\left\{\ln\left(\varepsilon^{-1}(\ln\varepsilon)^{2-bp}\right)\right\} \cdot (1 + o(1)),$$

для ε, достаточно малого.

Оператор T_o переводит множество

$$U_o : \|z\| \leq 2N\overline{x}_\varepsilon^b \exp\left\{a\overline{x}_\varepsilon^{-1}\right\}$$

в себя и является сжимающим. Поэтому уравнение (7) имеет единственное решение на $[\overline{x}_\varepsilon, 1]$ и его можно представить в виде

$$z(x,\varepsilon) = z_0(x) + z_1(x) + \varepsilon^2 z_2(x) + \dots.$$

В силу $|u_i(x)| \leq z_i(x)$ ряд (5) также сходится на отрезке $[\overline{x}_\varepsilon, 1]$.

Вместо (1)–(2) рассмотрим униформизованную задачу

$$\xi^2 u^{'}(\xi) = -g(x)u(\xi) + g(x) + \varepsilon b(x)u^r(\xi),\ u(1) = u^o,$$

$$\xi^2 x^{'}(\xi) = x^2(\xi) + \varepsilon a(x)u^p(\xi),\ x(1) = 1, \tag{8}$$

Теорема 2. Пусть 1) выполнено условие (U); 2) $a_0 \succ 0$, $c \succ 0$.

Тогда: 1) существует такое $\overline{\xi}_\varepsilon \to 0$, $\varepsilon \to 0$, что задача (8) на отрезке $\left[\overline{\xi}_\varepsilon, 1\right]$ имеет единственное решение; 2) уравнение $x(\xi) = 0$ имеет корень

$$\eta_\varepsilon = ap\left[\ln\left(\varepsilon^{-1}\left(\ln\varepsilon^{-1}\right)^{1-bp}\right)\right]^{-1}\cdot\left(1+O(1)\right);\ 3)\ (x^2(\xi)+\varepsilon u(\xi)\succ 0),\ \xi\in\left[\overline{\xi}_\varepsilon,1\right].$$

Отметим, что из этой теоремы вытекает эквивалентность задачи (1) и (8).

Доказательство. Сначала в (8) сделаем подстановку $x = \xi + \varepsilon y(\xi)$, а затем переходим к интегральному уравнению

$$T_1 u := u_0(\xi) + \int_1^\xi \left[e^{a/\xi}\xi^b P(\xi - s)e^{-a/s}\cdot s^{-b-2}\cdot\left[g(s+\varepsilon y(s)) - g(s)\right] + \left[q(s) - q(s+\varepsilon y(s))\right]u(s) + \varepsilon b(s)u^r(s)\right]ds, \tag{8.1}$$

$$T_2 y := y = \int_1^\xi \xi^2 s^{-4}\left[\varepsilon y^2 + a(s+\varepsilon y(s))u^p(s)\right]ds. \tag{8.2}$$

Обозначим через S множество функций $u(\xi)$, $y(\xi)\in C\left[\overline{\xi}_\varepsilon,1\right]$, удовлетворяющих условиям

$$|u(\xi)| \le 2N\cdot\xi^b e^{a/\xi},$$

$$|y(\xi)| \le (pa)^{-1}(2N)^{p+1}\cdot\xi^{bp}\cdot e^{ap/\xi}. \tag{9}$$

Пусть $\overline{\xi}_\varepsilon$ – решение уравнение

$$4(p+2)\lambda N^3\varepsilon\exp\left\{pa\overline{\xi}_\varepsilon^{-1}\right\}\overline{\xi}_\varepsilon^{bp} = 1, \tag{10}$$

где $\lambda = (ap)^{-1}(2N)^{p+1}$,

$$\overline{\xi}_\varepsilon = ap\left[\ln\left(\varepsilon^{-1}(\ln\varepsilon)^{-bp}\right)\right]^{-1}(1+O(1)) \tag{11}$$

Тогда оператор $T = (T_1, T_2)$ переводит множество S в себя. Также непосредственно проверяется, что оператор T переводит множество

$$\|u\| \le 2N\overline{\xi}_\varepsilon^b e^{ap/\overline{\xi}_\varepsilon},\ \|y\| \le \lambda\overline{\xi}_\varepsilon^{bp}e^{ap/\overline{\xi}_\varepsilon} \tag{12}$$

в себя и является сжимающим. Отсюда следуют существование и единственность решения уравнения (8) на отрезке $\left[\overline{\xi}_\varepsilon,1\right]$.

Утверждение 1) доказано.

Пусть ε, настолько мало, что

$c \ge 2N\overline{x}_\varepsilon + 2\overline{x}_\varepsilon^2$, $\overline{\xi}_\varepsilon \prec \overline{x}_\varepsilon$, $a_0 \ge 2N\overline{x}_\varepsilon + 2\overline{x}_\varepsilon^2$. Учитывая (9), оценим в (8) второе слагаемое интегральный член, который обозначим через $u_1(\xi,\varepsilon)$, тогда имеем $|u_1(\xi,\varepsilon)| \le 6N^3\varepsilon^\lambda e^{a(p+1)/\xi}\cdot\xi^{(1+b)p} \le \xi^b e^{a/\xi}\cdot(\overline{x}_\xi)^2$.

Поэтому из (8.1) получаем при $\xi\in\left[\overline{\xi}_\varepsilon, x_\varepsilon\right]$,

$$u(\xi) \ge \left[C - N\overline{x}_\varepsilon - \overline{x}_\varepsilon^2\right]\xi^b e^{a/\xi} \ge 2^{-1}Ce^{a/\xi}\cdot\xi^b \succ 0. \tag{13}$$

Уравнение $x(\eta) = 0$ запишем в виде

$$\eta = \eta^2 \int_\eta^1 s^{-4}\left[\varepsilon^2 y^2(s) + \varepsilon a(s+\varepsilon y(s))u^p(s)\right]ds\,. \tag{14}$$

Отсюда, учитывая (13) и (9) имеем

$$4^{-1}Ca_0\varepsilon N\lambda\eta^{bp}e^{ap/\eta}\left(1+O(\eta)\right) \le \eta \le 6\varepsilon\lambda N^3\eta^{bp}e^{ap}\,.$$

Из (14) получаем

$$\eta_\varepsilon = ap\left[\ln\left(\varepsilon^{-1}\left(\ln\varepsilon^{-1}\right)\right)^{1-bp}\right]^{-1}\left(1+O(1)\right). \tag{15}$$

Сравнивая (15) с (10) и (11), имеем $\bar{\xi}_\varepsilon \prec \eta_6$ $\left(0 \prec \varepsilon \ll 1\right)$. Этим доказано второе утверждение.

В силу (13) на отрезке $\left[\bar{\xi}_\varepsilon, \bar{x}_\varepsilon\right]$

$$x^2(\xi) + \varepsilon u(\xi) \succ 0\,.$$

Пусть при $\delta \in \left(\bar{x}_\varepsilon, 1\right)$, $x^2(\delta) + \varepsilon u(\delta) = 0$. Из этого уравнение имеем

$$\delta^2 \le 6\varepsilon N^\varepsilon \lambda e^{ap/\delta}\cdot\delta^{bp}\,.$$

Отсюда получаем $\delta \le \bar{x}_\varepsilon$, чего не может быть.

Теорема 2 полностью доказана.

Покажем пример.

Рассмотрим задачу Коши:

$$\left(x^2 + \varepsilon u(x)\right)u'(x) = -au(x)\,,\ u(1) = b \succ 0\,. \tag{16}$$

Запишем униформизованную задачу

$$\xi^2 u'(\xi) = -au(\xi)\,,\ u(1) = b\,, \tag{17}$$

$$\xi^2 x'(\xi) = x^2(\xi) + \varepsilon u(\xi)\,,\ x(1) = 1\,.$$

Отсюда имеем

$$u(\xi) = Ce^{a/\xi}\,,\ C = be^{-a}\,,$$

$$x_1 = -\frac{C}{a}e^{a/\xi}\left(1 - \frac{2\xi}{a} + \frac{2\xi^2}{a^2}\right) + \frac{C\xi^2}{a}\left(1 - \frac{2}{a} + \frac{2}{a^2}\right)e^a\,,$$

$$x_2(\xi) = O\left(e^{2a/\xi}\right),\ \xi \to 0\,.$$

Следовательно,

$$x = \xi - \frac{C\varepsilon}{a}e^{a/\xi}\left(1 + O(\xi)\right) + \varepsilon^2 O\left(\varepsilon^{2a/\xi}\right).$$

Определяя η, из уравнения

$$\eta = \frac{C\varepsilon}{a}e^{a/\eta}\left(1 + O(\eta)\right) + \varepsilon^2 O\left(e^{2a/\eta}\right),$$

имеем $\dfrac{a}{\eta} = \ln\left[\dfrac{a^2}{C\varepsilon}\left(\ln\dfrac{a^2}{C\varepsilon}\right)^{-1}\right] + O(1),\ \varepsilon \to 0$.

Подставляя значение η в $u(\eta) = Ce^{a/\eta}$, имеем $u(0) \sim \dfrac{a^2}{\varepsilon \ln\left(a^2/C\varepsilon\right)}$.

Заключение. Продолжение решение уравнения (1) до точки $x = 0$ методом возмущений является трудной задачей, т. е. эти особенности не только сохраняются в решениях высших порядков, но даже становятся резко выраженными при повышении порядка решения. Поэтому для доказательства существования решения задачи Коши (1)–(2) на всем рассматриваемом отрезке $[0,1]$ применяем метод униформизации.

Проведенное исследование доказывает преимущество применения метод униформизации к построению асимптотических разложений решений сингулярно возмущенных задач включительно до особой точки.

Литература

1. *Туркманов Ж.К.* Об одном классе возмущенных дифференциальных уравнений со слабой особенностью / Ж.К. Туркманов // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 1997. Вып. 26. – С. 143–147.
2. *Туркманов Ж.К.* Об асимптотическом поведении решений возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с иррегулярной особой точкой / Ж.К. Туркманов // Евразийское Научное Объединение, М. – 2021. – № 8 (78). – С. 49–52.
3. *Алымкулов К.* Метод малого параметра и обоснование метода Лайтхилла / К. Алымкулов // Изв. АН КиргССР. – 1979. – № 6. – С. 8–11.
4. *Lighthhill M.J.* A technique for rendering approximate solution to physical problems uniformly valid // Phil. Magazine. – 1949. – № 40. – P. 1179–1201.
5. *Carrier G.P.* Boundary layer problems in applied mathematics // Comm. Appl. Math. – 1954. – V.7. – P. 11–17.
6. *Comstok C.* The Poincare – Lighthill perturbation technique and its generalizations // SIAM Review. – 1972. – V.14. – № 3. – P. 433–443.
7. *Habets P.* On the method of strained coordinates // Lect. Notes in Math. – 1976. – Bd. 564. – № 1. – P. 152–162.
8. *Wasov W.A.* On the convergence of an approximation method of M.J. Lighthill // J. Rat. Mech. Anal. – 1955. – V. 40. – P. 751–767.

А. Омуралиев, Эсенгул кызы Пейил
(Кыргызстан)

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. Исследуется задача Коши для системы гиперболических уравнений. В этом случае перед производной по времени стоит малый параметр и при решении таких задач необходимо найти асимптотическое решение, для чего использовался метод регуляризации Ломова. Поскольку ставится задача Коши, в такой задаче возникает количество степенных пограничных слоев. При построении асимптотики решения этой задачи включает степенные погранслойные функции.

Ключевые слова: система гиперболических уравнений; малый параметр; метод регуляризация Ломова; погранслойная функция.

Сингулярно возмущенным задачам со степенным пограничным слоем посвящены работы [1–6]. Асимптотика, содержащая степенную погранслойную функцию, впервые была построена в [1]. При решении этой задачи С.А. Ломовым создан метод регуляризации сингулярно возмущенных задач [2]. В работах [3–6] метод применялся для построения асимптотики решений, содержащих степенную погранслойную функцию для обыкновенных дифференциальных уравнений.

В работах [9–12] метод обобщен для построения асимптотики решения сингулярно возмущенной параболической задачи.

В работе [9] построена регулярная асимптотика первой краевой задачи для параболических уравнений. Асимптотика таких решений включает степенные, параболические и угловые функции пограничного слоя в окрестности. Асимптотики решения системы параболических уравнений со степенным пограничным слоем изучалась в работе [10], а когда – матрица, то асимптотика содержит параболические функции пограничного слоя, описывающие пограничные слои вдоль и [11]. В работе [12] построена регуляризованная асимптотика решения задачи Коши для сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения и первой краевой задачи для двумерного дифференциального уравнения параболического типа, когда предельные операторы имеют особенность.

Данная статья посвящена построению асимптотики решения степенного пограничного слоя задачи Коши для гиперболической системы:

$$\begin{aligned}&(\varepsilon+t)\partial_t u+\varepsilon A(x,t)\partial_x u-B(x,t)u=f(x,t),(x,t)\in\Omega\\&u(x,t,\varepsilon)\big]_{t=0}=u^0(x),\end{aligned}\qquad(1)$$

где $\varepsilon > 0 -$ малый параметр, $\Omega=(0\le x<\infty)\times(0<t\le T)$.

Предположим, что заданные функции гладкие, и общая задача на собственные значения

$$A(x,t)\psi_i(x,t)=\lambda_i B(x,t)\psi_i(x,t)\qquad(2)$$

имеет вещественные собственные значения $\lambda_i(x,t)<0,\forall(x,t)\in\overline{\Omega}, i=\overline{1,n}$.

Следуя [7], введем регуляризующие переменные по формулам

$$\xi_i=\varphi_i(x,t),\ i=\overline{1,n}\qquad(3)$$

и расширенную функцию $\tilde{u}(x,t,\xi,\varepsilon)$ такую, что

$$\tilde{u}\Big|_{\xi=\varphi(x,t)} \equiv u(x,t,\varepsilon).$$

Для расширенной функции поставим задачу

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n}\left[(\varepsilon+t)\partial_t\varphi_j+\varepsilon A(x,t)\partial_x\varphi_j\right]\partial_{\xi j}\tilde{u}+(\varepsilon+t)\partial_t\tilde{u}+\varepsilon A(x,t)\partial_x\tilde{u}\\
&-B(x,t)\tilde{u}=f(x,t),\ \ M=(x,t,\xi)\in Q=\Omega\times(0,\infty)\\
&\tilde{u}\Big|_{t=0,\xi=0}=u^0(x).
\end{aligned} \tag{4}$$

Следуя [14, с. 307], вводя невырожденную матрицу X, одновременно приведем матрицы $A(x,t)$ и $B(x,t)$ к диагональным

$X^T BX=\operatorname{diag}(\lambda_i), X^T AX=I,$

I – единичная матрица. Производя в уравнении (4) замену

$\tilde{u}(M,\varepsilon)=Y\omega(M,\varepsilon), Y=L^T X, LL^T=A$

и умножая слева на Y^T относительно $\omega(M,\varepsilon)$ получим задачу

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n}\left[(\varepsilon+t)\partial_t\varphi_j+\varepsilon\partial_x\varphi_j\right]\partial_{\xi j}\omega+(\varepsilon+t)-\Lambda\big(\lambda(x,t)\big)\omega+t\left[\partial_t\omega+p(x,t)\omega\right]\\
&=Y^T f(x,t)-\varepsilon\left[\partial_t\omega+p(x,t)\omega+\partial_x\omega+D(x,t)\omega\right]\\
&\omega\big|_{t=0,\xi=0}=Y^T(x,t)\partial_t X(x,t), D(x,t)=Y^T A(x,t)\partial_x X(x,t)
\end{aligned}\quad . \tag{5}$$

Регуляризующую функцию $\varphi(x,t)$ выберем как решение задачи

$(\varepsilon+t)\partial_t\varphi_j+\varepsilon\partial_x\varphi_j=\lambda_j(x,0),\varphi_j(x,0)=0,$

т. е. в виде

$$\varphi_j(x,t)=\int_0^t\frac{\lambda_j\big(\varepsilon(\ln(s+\varepsilon)-z),0\big)}{s+\varepsilon}ds, z=\ln(t+\varepsilon)-\frac{x}{\varepsilon}.$$

Решение этой задачи ищем в виде ряда

$$\omega(M,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\omega_k(M)$$

для коэффициентов ряда получим задачи:

$$\begin{aligned}
&T_0\omega_0\equiv\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(x,0)\partial_{\xi_j}\omega_0-\Lambda\big(\lambda(x,t)\big)\omega_0+t\left[\partial_t\omega_0+p(x,t)\omega_0\right]=Y^T f\\
&T_0\omega_k=-\left[\partial_t\omega_{k-1}+p(x,t)\omega_{k-1}+\partial_x\omega_{k-1}+D(x,t)\omega_{k-1}\right],\\
&\omega_0\big|_{t=0,\xi=0}=Y^T(x,0)u^0(x),\ \ \omega_k\big|_{t=0,\xi=0}=0.
\end{aligned} \tag{6}$$

Решение итерационных задач (6) будем определять

$$\omega_0(M)=\sum_{i=0}^{n}\left[v_i^0(x,t)+z_i^0(x)\exp(\xi_i)+\sum_{j=1}^{n}c_{ij}^0(x,t)\exp(+\xi_j)\right]\psi_i(x,t),$$

где скалярные функции $c_{ij}^0(x,t), v_i^0(x,t)$ определяются из задач

$$t\partial_t v_i^0(x,t) + t\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ki}(x,t)v_k^0(x,t) - \lambda_i(x,t)v_i^0(x,t) = f_i(x,t)$$
$$t\partial_t c_{ij}^0 + \left(\lambda_j(x,0) - \lambda_i(x,t)\right)c_{ij}^0(x,t) + t\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ki}^1(x,t)c_{kj}^0(x,t), \tag{7}$$

$$c_{ii}^0(x,0) = \left(u^0(x),\psi_i^*\right) + \left(p(x,t)\psi_k^*(x,t)\right),\ f_i(x,t)$$
$$= \left(Y^T(x,t)f(x,t),\psi_i^*(x,t)\right), \tag{8}$$

Уравнение (7) решается без начального условия и имеет гладкое решение [13].

Из задачи (8) при $i \neq j$ определим $c_{ij}^0(x,t) = 0$, а при $i = j$ получим задачу

$$t\partial_t c_{ii}^0 + \left(\lambda_i(x,0) - \lambda_i(x,t)\right)\left(c_{ii}^0(x,t) + z_i^0(x)\right) + t\alpha_{ii}(x,t)c_{ii}^0(x,t) + t\alpha_{ii}(x,t)z_i^0(x) = 0,$$

$$c_{ii}^0(x,t)\Big|_{t=0} = \left(u^0(x),\psi_i^*(x,0)\right) - v_i^0(x,0) - z_i^0(x)$$

которая имеет гладкое решение.

В следующем шаге уравнение (6) имеет свободной член

$$F_1(M) = -\left[\partial_t\omega_0 + \partial_x\omega_0 + D(x,t)\omega_0\right] = -\sum_{i=1}^{n}\Big\{\partial_t v_i^0 + \partial_x v_i^0 +$$
$$+\sum_{k=1}^{n}d_{ik}(x,t)v_k^0 + \left(\partial_t c_{ii}^0 + \partial_x c_{ii}^0\right)\exp(+\xi_i) + \partial_x z^0(x)e^{\xi_i} +$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ki}(x,t)z_k^0(x)e^{\xi_k} + \sum_{k=1}^{n}d_{k,i}(x,t)c_{kk}^0(x,t)\exp(\xi_k)\Big\}\psi_i(x,t)d_{ik}(x,t) =$$
$$= \left(\partial_t\psi_i,\psi_k^*\right) + \left(\partial_x\psi_i,\psi_k^*\right) + \left(D(x,t)\psi_i,\psi_k^*\right).$$

Группируя члены, перепишем

$$F_1(M) = \sum_{i=1}^{n}\Big[P_i^{1,0}(x,t) + \left(P_i^{2,0}(x,t) - \partial_x z_i^0(x) - \alpha_{ii}(x,t)z_i^0(x)\right)\exp(\xi_i) +$$
$$+\sum_{k=1(k\neq i)}^{n}\alpha_{ki}(x,t)\left(z_k^0(x) + c_{kk}^0(x,t)\right)\exp(\xi_k)\Big]\psi_i(x,t),$$

где

$$P_i^{1,0}(x,t) = -\left(\partial_t v_i^0 + \partial_x v_i^0 + \sum_{k=1}^{n}\alpha_{ki}(x,t)v_k^0\right),$$
$$P_i^{2,0}(x,t) = -\left(\partial_t c_{ii}^0 + \partial_x c_{ii}^0 + \alpha_{ii}(x,t)c_{ii}^0\right).$$

Уравнение (6) при $k = 1$ с такой правой частью, имеет решение, представимое в виде

$$\omega_1(M) = \sum_{i=1}^{n}\left[v_i^1(x,t) + z_i^1(x)\exp(\xi_i) + \sum_{j=1}^{n}c_{ij}^1(x,t)\exp(\xi_j)\right]\psi_i(x,t),$$

где функции определяются из уравнений

$$t\partial_t v_i^1 + t\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ki}(x,t)v_k^1(x,t) - \lambda_i(x,t)v_i^1(x,t) = P_i^{1,0}(x,t), \tag{9}$$

$$\begin{gathered}t\partial_t c_{ij}^1 + \left(\lambda_j(x,0) - \lambda_i(x,t)\right)c_{ij}^1(x,t) + t\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ki}^2(x,t)c_{kj}^1(x,t)\Big]\exp\left(\xi_j\right) + \\ + \sum_{k=1(k\neq i)}^{n}\alpha_{ki}^2(x,t)c_{kk}^0(x,t)\exp\left(\xi_k\right) + t\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ki}^1(x,t)z_k^1(x)\exp\left(\xi_k\right),\end{gathered} \tag{10}$$

$$c_{ii}^1(x,0) = -v_i^1(x,0) - \sum_{j=1(i\neq j)}^{n}c_{ij}^1(x,0) - z_i^1(x). \tag{11}$$

Уравнение решается без начального условия методом работы [13]. Уравнение (10) разделим на два уравнения:

$$\begin{gathered}t\partial_t c_{ii}^1 + \left(\lambda_i(x,0) - \lambda_i(x,t)\right)c_{ii}^1(x,t) + t\alpha_{ii}^1(x,t)c_{ii}^1(x,t) + \\ + \left[\lambda_i(x,0) - \lambda_i(x,t) + t\alpha_{ii}^1(x,t)\right]z_i^1(x) = F_{1i}(x,t),\end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered}t\partial_t c_{ij}^1 + \left(\lambda_j(x,0) - \lambda_i(x,t)\right)c_{ij}^1(x,t) + t\sum_{k=1(i\neq k)}^{n}\alpha_{ki}^1(x,t)c_{kj}^1 \\ +t\left(\alpha_{ij}^1(x,t)z_j^1(x)\right) = \alpha_{ji}(x,t)\left(z_j^0(x) + c_{jj}^0(x,t)\right).\end{gathered} \tag{13}$$

Уравнение (12) при начальном условии (11) разрешимо, если $F_{1i}(x,0) = 0$, т. е. при $\partial_x z_i^0(x) + \alpha_{ii}(x,t)z_i^0(x) = P_i^{2,0}(x,0)$.

Решим это уравнение при произвольном начальном условии при $x = 0$. Уравнение (13) и (9) решаются без начальных условий.

Продолжая процесс определим все коэффициенты частичной суммы

$$\omega_{n,\varepsilon}(M) = \sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k\omega_k(M).$$

Теорема: Пусть $A(x,t), B(x,t) \in C^{n+1}\left(\Omega, \mathbb{C}^{n\times n}\right), f(x,t) \in C^{n+1}\left(\overline{\Omega}, \mathbb{C}^n\right)$, собственные значения общей задачи на собственные значения

$$B(x,t)\psi_i(x,t) = \lambda_i(x,t)A(x,t)\psi_i(x,t)$$

различные и $\lambda_i(x,t) < 0, \forall(x,t) \in \overline{\Omega}$. Тогда задача (1) имеет асимптотическое решение вышеприведенном классе, т. е.

$$u(x,t,\varepsilon) - u_{kn}\left(x,t,\frac{\varphi(x,t)}{\varepsilon}\right) < c\varepsilon^{n+1}.$$

Литература

1. *Васильева А.Б.* О внутреннем переходном слое при решении системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка / А.Б. Васильева / Дифференциальные уравнения. – 1985. – № 21. – С. 1537–1544.

2. *Бутузов В.Ф.* Об одной сингулярно возмущенной системе уравнений в частных производных первого порядка / В.Ф. Бутузов А.Ф. Каращук // Математические заметки. – 1995. – № 57 (3). – С. 338–349.
3. *Бутузов В.*Ф Асимптотика решения системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с малым параметром / В.Ф. Бутузов А.Ф. Каращук // Фундаментальная и прикладная математика. – 2000. – № 6 (3). – С. 723–738.
4. *Нестеров А.В.* Асимптотика решения сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с малой нелинейностью в критическом случае / А.В. Нестеров О.В. Шулико / Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2007. – 47 (3). – С. 438–444.
5. *Нестеров А. В.* Асимптотика решения задачи Коши для сингулярно возмущенной системы гиперболических уравнений / А. В. Нестеров // Сборник Чебышева. – 2011. – № 12 (3). С. 93–105.
6. *Нестеров А.В.* Об асимптотике решения сингулярно возмущенной системы уравнений в частных производных первого порядка с малой нелинейностью в критическом случае / А.В. Нестеров // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2012. – № 52 (7). – С. 1267–1276.
7. *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений / С.А. Ломов. – М., 1981. – 400 с.
8. *Ломов С.А.* Степенной пограничный слой в задачах с сингулярным возмущением / С.А. Ломов // Изв. АН СССР. Сер. Мат., 1966. – Т. 30. – Вып. 3. –С. 525–572.
9. *Omuraliev A.S., Esengul kyzy P.* Regularization of a singularly perturbed parabolic equation with power boundery layer, Congress of the Turkic World Mathematicians, Kyrgyzstan, “Issyk-Kul, Aurora”, 2014, 5–7 June, p. 136–142.
10. *Omuraliev A.S., Abylaeva E.D., Esengul kyzy P.* A system of singularly perturbed parabolic equations with a power boundary layer // LOBACHEVSKII JOURNAL OF MATHEMATICS – 2020, 41 (1), p. 71–79.
11. *Omuraliev A.S., Esengul kyzy P.* A Singularly Perturbed System of Parabolic Equations // LOBACHEVSKII JOURNAL OF MATHEMATICS – 2021, 42(15), p. 3696–3704.
12. *Омуралиев А.С.* Параболическая задача со степенным пограничным слоем / А.С. Омуралиев, Э.Д. Абылаева, Эсенгул кызы П. // Дифферен. уравнения. – 2021. – Т. 57. – № 1. – С. 67–77.
13. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений / В. Вазов. – М.: Мир, 1968.
14. *Уилкинсон Дж.Х.* Алгебраическая проблема собственных значений / Дж.Х. Уилкинсон. – М.: Наука, 1970. – С. 564.

Л.А. Хамидов, Б.Р. Ганиева, Х.Л. Хамидов, С.Г. Анварова
(Узбекистан)

МОДЕЛЬ РАСЧЕТА УПРУГИХ СМЕЩЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ ОСНОВАНИЯ КРУПНЫХ РЕЗЕРВУАРОВ

Аннотация. В работе при построении краевой задачи для решения уравнений равновесия предполагается, что жесткое упругое полупространство ослаблено несколькими неортогональными цилиндрическими неоднородностями большой протяженности. Учитываются продольный сдвиг, сжатие, задаваемое в виде однородной деформации, и вертикальное давление от веса водохранилища. Использованы тензор фундаментальных решений 2D-Kelvin и метод источников. Отмечено, что при формировании количественной модели в качестве квазистатических изменений выделено соотношение внешних сил при переходе от состояния нагрузки в состояние разгрузки.

Ключевые слова: количественная модель; уравнение, напряжение; смещение; тензор; поле; расчет; алгоритм; водохранилище; состояние.

Геодинамическая задача о появлении дополнительных упругих смещений и деформаций вдоль разломов за счет изменений веса водохранилища и основного упругого силового поля земной коры заменяется краевой задачей математической физики о локализации дополнительных смещений в зонах активных сейсмотектонических разломов, простирающихся близко к водохранилищам [1–3].

Постановку задачи можно представить в следующем виде: жесткое упругое полупространство ослабленное несколькими цилиндрическими неоднородностями большой протяженности, испытывает на всем протяжении продольный сдвиг или сжатие, на бесконечности задаваемое в виде однородной деформации, и вертикальное давление от веса водохранилища. Выбрав центр прямоугольных декартовых координат так, чтобы одна ось была направлена по оси концентратора, а остальные – по условию выбора правой системы, придем к статической задаче для уравнения равновесия Ламе [3, 4]:

$$(\lambda+\mu)\,\mathrm{grad}(\mathrm{div}W)+\mu\nabla^2 W=-mgh; \tag{1}$$

где $W\{u,v,w\}: u=u(x,y,z); v=v(x,y,z); w=w(x,y,z)$ компоненты перемещений; $\lambda,\mu-$ упругие постоянные Ламе; с условиями на границе:

$$\sigma_{nn}^{(i)}=\sigma^{(i+1)}{}_{nn};\ W_1=W_2;\ \sigma_{ns}^{(i)}=\sigma^{(i+1)}{}_{ns}; \tag{2}$$

для сочетания и участков групп концентраторов;

$$\sigma^{(i)}{}_{nn}=\sigma^{(i+1)_{nn}};\ \boldsymbol{W}_1=\boldsymbol{W}_2;\ \sigma^{(i)}{}_{nn}=k\sigma^{(i)}{}_{ns}; \tag{3}$$

Здесь $\sigma\big(i_{jj}$ – jj-тые компоненты напряжений в $\dot{\mathrm{r}}$ -том концентраторе; k – коэффициент Кулона (трения покоя). На свободной поверхности.

$$\sigma_{nn}=0;\sigma_{ns}=0. \tag{4}$$

На границе с основанием водохранилища действует квазистатическая нагрузка $\delta \mathrm{g}_v$ от давления веса объема $\delta \mathrm{g}_v=\dfrac{1}{4\pi\mu T}{}_{k=1}^{m}\left(P_k\Delta S_k\Delta t_k\ /\ S_k^2\right);$ где $\pi\approx 3{,}14;\mu-$ модуль сдвига;

$T-$ общее время нагрузки разгрузки на основание; P_k- давление на основание при Δt_k; ΔS_k- разница изменения площади зеркала при росте k от разных Δt_k; Δt_k –

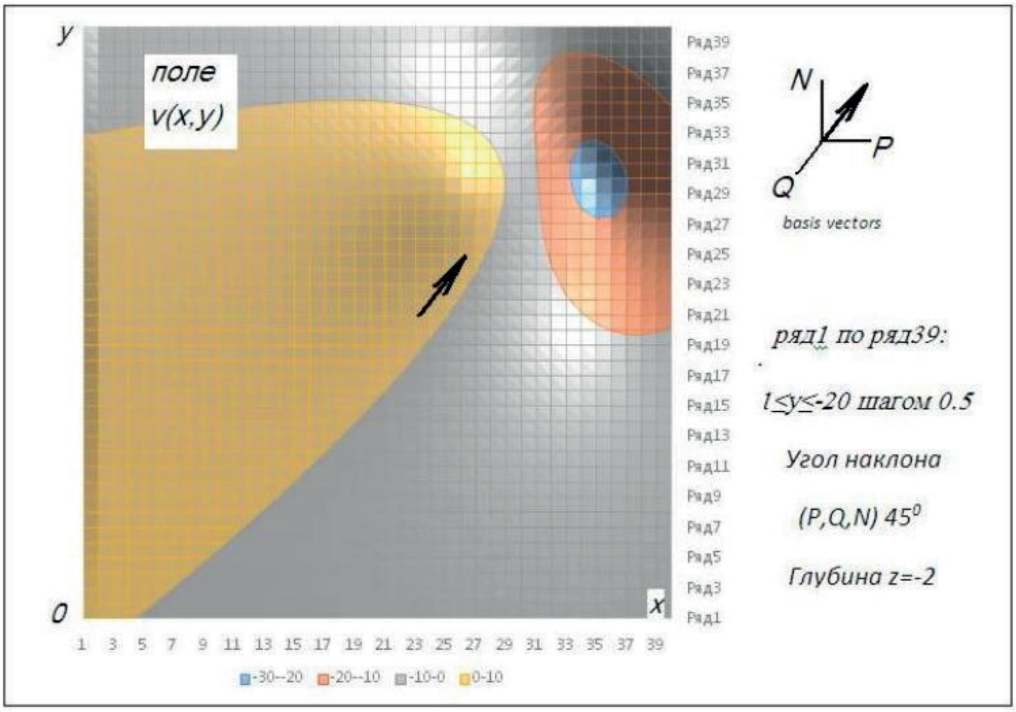


Рисунок 1 – Поле вертикальных перемещений
на глубине $z = -2$ при $f(P,Q,0)$ в источнике $(+5,+8,-5)$

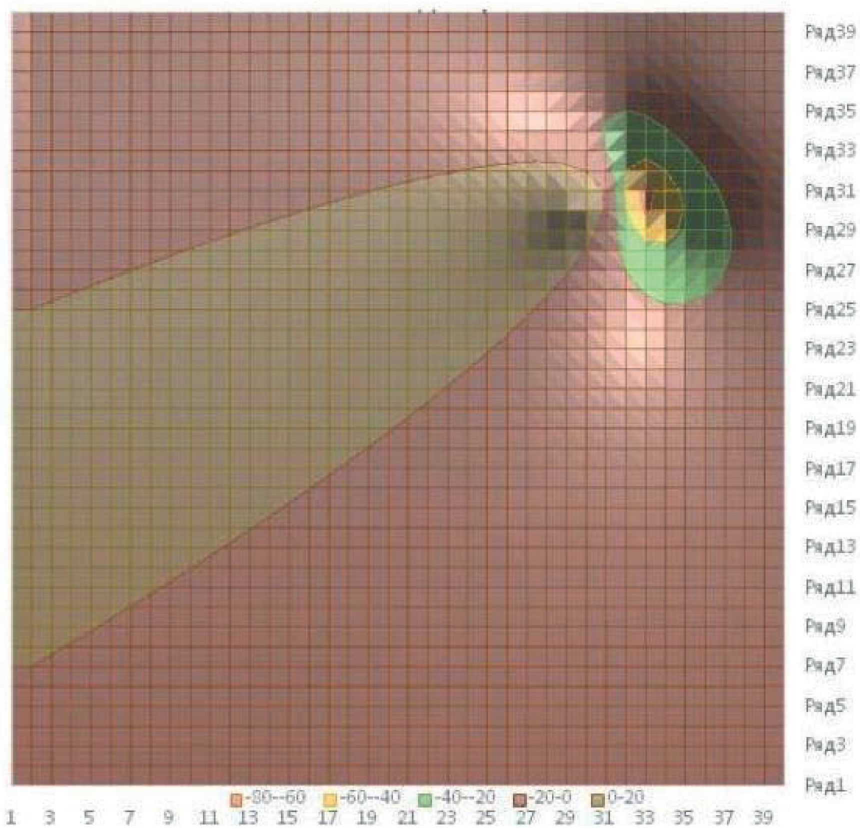


Рисунок 2 – Поле вертикальных перемещений
на глубине $z = -4$ $f(P,Q,0)$ в источнике $(+5,+8,-5)$

интервалы от нагрузки до разгрузки (или обратно) времени (всегда $T > \Delta t_k$); S_k^2 − изменения площади зеркала.

Выражения (2) и (3) сформулированы по отношению к выбранной системе координат, центры которых установлены в центрах концентраторов, т. е. неоднородностей. Ее назовем местной. Уравнение (1) и условия (4) составлены по отношению к основной системе координат, центр которой установлен на свободной поверхности над центром исходного концентратора. Используя аффинное преобразование, условие на границе приведено к основной системе. Ниже на рисунках 1 и 2 показаны результаты численных экспериментов, выполненных по каждому блоку тензоров 2D-Kelvin в среде C^{++}. Экспериментальные расчеты проведены при $u_1 / \varepsilon_0 X; v_1 / \varepsilon_0 x;\ a = 5; b = 2; N = 10; x_0 = 5; y_0 = 8;$ (при 3D $z_0 = -5) m = 4,5; n = 3,2; Q = 6; P = 8$; $\varepsilon = 1,8 \cdot 10^4; \alpha = 45^\circ$; для поля $0 \le x \le 20; 0 \le y \le -20$ шагом 0.5 произведены тестовые численные расчеты перемещений по тензорам 2D-Kelvin в среде C^{++}. Пусть точки $x_i y_i z_i$ соответствовали точке подвижки от исходной точки по i-той площадке разрыва с падением $\Delta\sigma$.

Таким образом, можно допустить, что количественная модель на базе тензора 2D-Kelvin функция σ_{ij} (u, v, w), удовлетворяющая уравнению Ламе для полупространства для выявленных (P, Q) и при соответствующем δg_v и $\Delta\sigma_i$, может дать картину НДС земной коры основания крупных резервуаров. При этом можно предположить (используя принцип Сен-Венана), что точки (x_0, y_0, z_0) и $(x_{0j} y_{0j}, Z_{0j})$ приложения сосредоточенной силы будут находиться в середине разрыва.

Литература

1. *Боброва М.Е.* Моделирование поля деформаций и зон дилатансии в упругом полупространстве с комбинацией двойных сил / М.Е. Боброва, А.С. Пережогин // Вестник КРАУНЦ. физ.-мат. науки. – 2011. –№ 1 (2). С. 31–36. URL:https://doi.org/10.18454/2079-6641-2011-2-1-30-35.
2. *Vladimir Tetelmin, Vladimir Grachev, Olga Pliamina*. Influence of large water-storage reservoirs on the isostatic equilibrium of the earth's crust // Inter. Jour. of Mechanical Engineering and Technology (IJMET) Volume 9, Issue 6, June 2018, pp. 983–991, Article ID: IJMET_09_06_110. https://iaeme.com/MasterAdmin/Journal uploads/IJMET/VOLUME 9 ISSUE 6/IJMET 0906 110.pdf.
3. *Lutfulla Khamidov, Mahmud Turapov, Soqijon Mahkamov, Farkhod Artikov, and Shavkat Suyunov*. Tracking the local seismicity level in the active influence zone of the southern Uzbekistan reservoirs // J. E3S Web of Conf. Vol. 264, https://doi.org/10.1051/e3sconf/202126402043.
4. *Khamidov Kh.L., Artikov F.R., Khamidov L.A.* Calibration of seismic station channels in Gissarak and Tupolang reservoirs and monitoring of seismic events in their near zones // International Journal of Geology, Earth & Environmental Sciences. – 2021. – Vol. 11. – Pp. 164–173. (ISSN: 22772081 An Open Access, Online International Journal Available at http://wWW.cibtech.org/igee.htm

Ф.М. Шамсудинов, Р.С. Валиев
(Таджикистан)

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОДНОЙ ПЕРЕОПРЕДЕЛЁННОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ДВУМЯ ВНУТРЕННИМИ СИНГУЛЯРНЫМИ ЛИНИЯМИ

Пусть

$$D = \{(x,y) : -a < x < a,\ 0 < y < a\},\ \Gamma_1 = \{y = 0, -a < x < a\},$$
$$\Gamma_2 = \{x = 0,\ \ 0 < y < a\}.$$

Далее обозначим

$$\Gamma_1^0 = \{y = x, 0 \le x \le a\},\ \Gamma_2^0 = \{y = -x, -a \le x \le 0\}.$$

В области D рассмотрим систему уравнений следующего вида:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{a_1(x,y)}{(x^2-y^2)^m}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{b_1(x,y)}{(x^2-y^2)^n}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{c_1(x,y)}{(x^2-y^2)^{m+n}} u = \\ &\frac{f_1(x,y)}{(x^2-y^2)^{m+n}}, \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a_2(x,y)}{(x^2-y^2)^k} u = \frac{f_2(x,y)}{(x^2-y^2)^k}, \end{aligned}\right. \tag{1}$$

где $a_1(x,y), b_1(x,y),\ c_1(x,y),\ a_2(x,y),\ f_j(x,y), j = 1,2 -$ заданные функции в области $D,\ m = n = k = 1,\ u(x,y) -$ искомая функция.

Проблеме исследования дифференциальных уравнений и переопределенных систем с регулярными, сингулярными и сверхсингулярными коэффициентами посвящены работы [1–5].

Используя методику разработанного в [1–3] для системы уравнений (1), когда второе уравнение системы является исходным получено представление многообразия решений при помощи одной произвольной постоянной и изучены свойства полученных решений.

Теорема 1. Пусть в системе уравнений (1) коэффициенты и правые части удовлетворяют следующим условиям:

1) $a_1(x,y) \in C_x^1(\underline{D}),\ a_2(x,y) \in C_y^1(\underline{D}),\ \ f_2(x,y) \in C_x^1(\underline{D}),$

$b_1(x,y),\ c_1(x,y),\ \ f_1(x,y) \in C(\underline{D});$

$$c_2(x,y) = -c_1(x,y) + (x^2 - y^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_1(x,y)}{x^2-y^2}\right) + a_1(x,y)b_1(x,y) = 0;$$

2) $\dfrac{a_2(y,y)}{2y} > 0,$ в окрестности $\Gamma_1^0,$

$\frac{a_2(y,y)}{2y} < 0,\quad$ в окрестности Γ_2^0;

$G_1(0) < 0$

$\left|a_2(x,y) - a_2(y,y)\right| \le H_1 |x-y|^{\mu_1},\ H_1 = const,$

$0 < \mu_1 < 1$ в окрестности Γ_1^0,

$\left|a_2(x,y) - a_2(y,y)\right| \le H_2 |x+y|^{\mu_2},\ \ H_2 = const,$

$0 < \mu_2 < 1,$ в окрестности Γ_2^0;

$\left|G_1(y) - G_1(0)\right| \le H_3 y^{\mu_3},\ H_3 = const,\ \mu_3 > 1;$

3) $a)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{a_2(x,y)}{x^2-y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a_1(x,y)}{x^2-y^2}\right)\quad$ *в* D,

$$b)\left(x^2-y^2\right)\left(a_2(x,y) - a_1(x,y)\right) exp\left[-W_{b_1}^1(x,y)\right]\left|\frac{x+y}{x-y}\right|^{-\frac{b_1(y,y)}{2y}} \times$$

$$\times\left(\psi_1(y) + \int_0^x \frac{f_1(t,y)}{\left(t^2-y^2\right)^2} \exp\left[W_{b_1}^1(t,y)\right] \times \left|\frac{t+y}{t-y}\right|^{-\frac{b_1(y,y)}{2y}} dt\right) + f_1(x,y) =$$

$$= \left(x^2-y^2\right)^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_2(x,y)}{x^2-y^2}\right) + a_1(x,y) f_2(x,y) \text{ в } D$$

4) $f_2(x,y) = o\left(|x-y|^{\gamma_1}\right),\ \ \gamma_1 > -\frac{a_2(y,y)}{2y}$ в окрестности Γ_1^0,

$f_2(x,y) = o\left(|x+y|^{\gamma_2}\right),\ \ \gamma_2 > \frac{a_2(y,y)}{2y}$ в окрестности Γ_2^0,

$F_1(y) = o\left(y^{\gamma_1}\right),\ \ \gamma_1 > 1.$

Тогда любое решение системы уравнений (1) из класса $C_2\ \left(D \setminus \left(\Gamma_1^0 \cup \Gamma_2^0\right)\right)$ представимо в виде

$$u(x,y) \equiv T_1\left(\psi_1(y), f_2(x,y)\right), \tag{2}$$

$$\psi_1(y) \equiv N_1\left(c_1, f_1(0,y), f_2(0,y)\right), \tag{3}$$

где $T_1\left(\psi_1(y), f_2(x,y)\right), N_1\left(c_1, f_1(0,y), f_2(0,y)\right) -$ известные интегральные операторы, $F_1(y), G_1(y)\ -$ известные функции, c_1 – произвольная постоянная.

Полученное решение обладает свойствами:

1. Если $x \to 0 \;\; u \;\; y \to 0,$ то

$$\left\{u\left(x,y\right)\right\} = \psi_1\left(0\right) = o\left(exp\left[-\frac{G_1\left(0\right)}{y}\right]\right).$$

$$2^{\circ}.\left\{exp\left[\frac{G_1\left(0\right)}{y}\right]u\left(x,y\right)\right\} = c_1.$$

Литература

1. *Раджабов Н.* Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линией или сингулярными поверхностями / Н. Раджабов. – Душанбе: Изд-во ТГУ, 1985. – 145 с.
2. *Раджабов Н.* Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами / Н. Раджабов. – Душанбе: Изд-во ТГУ, 1992. – 236 с.
3. *Раджабов Н., Мохамед Эльсаед Абдель Аал*. Переопределенная линейная система второго порядка с сингулярными и сверхсингулярными линиями / Н. Раджабов, Мохамед Эльсаед Абдель Аал. – Lap Lambert AcademicPublishing, Germany, 2011. – 234 с.
4. *Тасмамбетов Ж.Н.* Построение нормальных и нормально-регулярных решений специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка / Ж.Н.Тасмамбетов. – Актобе, 2015. – 463 с.
5. *Шамсудинов Ф.М.* Об одной переопределенной системе дифференциальных уравнений второго порядка с сильной особенностью / Ф.М. Шамсудинов // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. – 2014. – Т. 16. – № 1. – С. 40–46.

АННОТАЦИИ ДОКЛАДОВ НЕ ПРЕДСТАВЛЕННЫХ АВТОРАМИ СТАТЕЙ

О. Абдуллаев
(Узбекистан)

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Аннотация. В работе исследуется однозначная разрешимость задачи типа Геллерстедта для уравнения смешанного типа с нелинейной нагрузкой.

Бекмурза уулу Ы.
(Кыргызстан)

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ БИСИНГУЛЯРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С РЕГУЛЯРНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКОЙ

Аннотация. На отрезке строятся равномерные асимптотические разложения решения двухточечных краевых задач Дирихле, Неймана и Робена для линейного неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной. Особенность рассматриваемых задач заключается в том, что соответствующие невозмущенные краевые задачи для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка имеют регулярную особую точку на левом конце отрезка. Асимптотические решения краевых задач строятся модифицированным методом пограничных функций Вишика – Люстерника – Васильевой – Иманалиева. Асимптотические разложения решения краевых задач обоснованы.

Акбарали уулу Д.
(Кыргызстан)

МАТЬЕНИН ТЕҢДЕМЕСИН ФЛОКЕНИН ТЕОРИЯСЫ БОЮНЧА ИЗИЛДӨӨ

Аннотация. Макалада Матьенин теңдемесинин чыгарылышы Флокенин теориясы боюнча изилденет. Матьенин теңдемеси сызыктуу өзгөрүлмө мезгилдүү коэффициенттүү бир тектүү экинчи тартиптеги кадимки дифференциалдык теңдеме. Маселенин өзгөчөлүгү Матьенин теңдемесинин мезгилдүү чыгарылыштардын касиеттерин аныктоо. Бул касиеттер Флокенин теориясынын жардамында табылат. Алгач кичине параметр усулунун жардамында чыгарылыштын өзгөчөлүгү далилденет. Андан соң Флокенин теориясы боюнча толук изилденет. Изилдөөнүн максаты – Матьенин теңдемесинин мезгилдүү чыгарылыштарын чектелбеген убакытта тургузуу, алардын геометриялык маанилерин аныктоо.

Ж. Жээнтаева
(Кыргызстан)

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА РАСЩЕПЛЕНИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПРИ ПОСТОЯННО ДЕЙСТВУЮЩИХ ВОЗМУЩЕНИЯХ

Аннотация. Рассматривается задача стабилизации объекта при постоянно действующих внешних возмущениях при помощи обратной связи. Известно, что при слишком большом коэффициенте обратной связи вместо стабилизации возникает раскачивание объекта. Причина этого явления – неустранимое запаздывание управления. Произведение коэффициента обратной связи и запаздывания является абсолютной константой. Для нахождения ее границы раньше применялись функции Ляпунова. В статье рассматривается метод расщепления пространства решений. Этот метод был разработан нами для доказательства эквивалентностей в пространстве решений начальных задач для динамических систем. Мы также предложили определения: отношение асимптотической эквивалентности – расстояние между двумя решениями стремится к нулю при увеличении времени; отношение асимптотической экспоненциальной эквивалентности – расстояние между двумя решениями убывает экспоненциально при увеличении времени.

А. Жораев
(Кыргызстан)

АКСИОМАТИКА ДИНАМИЧЕСКИ-КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ ДЛЯ КОМПЬЮТЕРНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ЕСТЕСТВЕННОГО ДВИЖЕНИЯ В ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Аннотация. Для компьютерного представления естественного движения в топологических пространствах А.А. Борубаев и П.С. Панков ввели понятие кинематического пространства. В нем расстояние между двумя точками определяется минимальным временем передвижения от одной точки до другой. Ранее мы рассмотрели следующую задачу. Пусть имеются объект и препятствия. Необходимо передвинуть объект на другое место, если это возможно. За какое минимальное время это может быть сделано? Для такой задачи мы предложили аксиоматизацию управляемого движения протяженных объектов в пространстве с ограниченной скоростью и ввели новое понятие обобщенного кинематического пространства. В реальности вследствие инерции поворот невозможно осуществить мгновенно. В статье вводится понятие локально-направленного пространства и предлагается аксиоматика движения в таком пространстве с учетом времени на повороты.

С. Игисинов, Р. Макулбекова, Е. Баяндиев
(Казахстан)

ОЦЕНКИ СОБСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ ПОЛУПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. В работе рассматривается класс вырождающихся эллиптических уравнений с произвольным степенным вырождением. Изучаются вопросы о существовании, единственности и гладкости решений полупериодической задачи Дирихле для одного класса вырождающихся эллиптических уравнений с произвольным степенным вырождением. В работе получены двусторонние оценки сингулярных чисел (s-чисел). Заметим, что оценки сингулярных чисел (s-чисел) показывают скорость приближения найденных решений конечномерными подпространствами. Здесь также получены оценки собственных чисел.

Камчыбек кызы Ф.
(Кыргызстан)

БИРИНЧИ ТАРТИПТЕГИ БИСИНГУЛЯРДЫК МАСЕЛЕГЕ ЭКИ ӨЛЧӨМДҮҮ АЖЫРАТУУ УСУЛУН КОЛДОНУУ

Аннотация. Макалада биринчи тартиптеги туундулардын астында кичине параметр катышкан биринчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес коэффициентти өзгөрүлмөлүү кадимки дифференциалдык теңдеме каралат. Бул теңдеменин чыгарылышы үчүн Кошинин шарты коюлган. Тиешелүү козголбогон теңдеме баштапкы чекитте өзгөчө чекитке ээ болгон бисингулярдык козголгон биринчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес өзгөрүлмө коэффициенттүү кадимки дифференциалдык теңдеме үчүн Кошинин чектүү аралыкта коюлган маселесинин чыгарылышынын жашашы, жалгыздыгы жана чыгарылыштын чектелбегендиги далилденет. Изилдөөнүн максаты – Кошинин бисингулярдык маселесинин чыгарылышынын бир калыптагы толук асимптотикалык ажыралмасын эки өлчөмдүү усулдун жардамында тургузуу жана ажыралманын туура экендигин далилдөө. Колдонулуучу усулдар: өзгөртүп түзүү усулу, Лагранждын усулу, кичи параметр усулу, эки өлчөмдүү ажыратуу усулу.

Кубанычбек к. Ж
(Кыргызстан)

АСИМПТОТИКАЛЫК ЧЕЧИМДИ ТУРГУЗУУДА ЭСЕЛУУ МАСШТАБДАР УСУЛУ

Аннотация. Козголгон сызыктуу жана сызыктуу эмес дифференциалдык теңдемелердин жакындатылган чыгарылыштарын тургузууда эселүү масштабдар усулун колдонуу ыкмалары каралат.

Нурлан к. З.
(Кыргызстан)

ЧЫГАРЫЛЫШЫНДА СЕКИРИГИ БАР СИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН МАСЕЛЕНИН АСИМПТОТИКАСЫ

Аннотация. Макалада күйүүнүн жөнөкөй математикалык модели болгон биринчи тартиптеги сызыктуу эмес автономдук кадимки дифференциалдык теңдеме үчүн Коши маселесинин чыгарылышынын асимптотикасы тургузулган. Чыгарылышта секирик чекит аныкталган. Бул маселе Э.Л. Рейсстин маселеси деп аталат.

Н. Максатбекова
(Кыргызстан)

ДИРИХЛЕНИН МАСЕЛЕСИНИН РЕГУЛЯРДУУ ТЫШКЫ ЧЫГАРЫЛЫШЫ

Аннотация. Бисингулярдык козголгон Дирихле маселесинин тышкы чыгарылышынын бир калыптагы асимптотикалык ажыралмасы тургузулду.

Г. Омаралиева
(Кыргызстан)

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ БИСИНГУЛЯРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С БИПОГРАНИЧНЫМ СЛОЕМ

Аннотация. Исследуются бисингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Найдены достаточные условия существования промежуточного пограничного слоя вблизи классического погранслоя. Построены асимптотики решения бисингулярных краевых задач, и они обоснованы.

К. Оспанов, Р. Ахметкалиева
(Казахстан)

О ГЛАДКОСТИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация. Рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка с неограниченными промежуточными и старшими коэффициентами. Обсуждаются условия на коэффициенты, обеспечивающие однозначную разрешимость и максимальную регулярность обобщенного решения.

М. Оспанов
(Казахстан)

СВОЙСТВА РЕШЕНИЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Аннотация. Рассматривается нелокальная краевая задача для уравнения третьего порядка и доказывается ограниченность решения и его производных, входящих в данное уравнение.

Д. Турсунов
(Кыргызстан)

БИСИНГУЛЯРНЫЕ ЗАДАЧИ С БИПОГРАНИЧНЫМИ СЛОЯМИ

Аннотация. Исследована задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с малым параметром при производной и особой начальной точкой. Найдено достаточное условие, при выполнении которого появляется промежуточный пограничный слой в сингулярно возмущенной задаче, описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями первого порядка. Модифицированным методом пограничных функций построено полное асимптотическое разложение решения в виде асимптотического ряда в смысле Эрдейи. Полученное разложение обосновано, т. е. получена оценка для остаточного члена.

И. Хажиев
(Узбекистан)

УСЛОВНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОДНОЙ ЛИНИЕЙ ВЫРОЖДЕНИЯ

Аннотация. Доказываются теоремы о единственности и условной устойчивости решения краевой задачи для уравнения второго порядка с одной линией вырождения.

К. Шакиров, А. Токторбаев
(Кыргызстан)

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ С ОБОБЩЕННОЙ ФУНКЦИЕЙ НЕОДНОРОДНОСТИ

Аннотация. Решение сингулярной задачи зависит от неоднородной части рассматриваемых уравнений. Если неоднородная часть – аналитическая функция, то, переходя к комплексной области, получим оценку сингулярной задачи. Когда неоднородная часть – дифференциальные уравнения – будет обобщенной функцией, то способы получения оценки бывает иными. Одним словом, функция не является функцией в обычном смысле. В работе показаны способы получить асимптотические оценки сингулярной задачи в пространстве обобщенных функций. Для этого применим методы вариации постоянных: метод последовательных приближений, метод мажорант и метод от противного, а также некоторые свойства обобщенных функций. Вводим некоторые определения и докажем леммы и теорему. При исследовании поставленной задачи не переходим к комплексной области. В итоге докажем существование и единственность.

Д. Сафаров
(Узбекистан)

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОЙ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА НА ПЛОСКОСТИ

Аннотация. Точное решение одной квазилинейной системы уравнений третьего порядка на плоскости.

Т.К. Юлдашев
(Узбекистан)

ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ И ПАРАМЕТРАМИ

Аннотация. Рассматривается интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма с вырожденным ядром и двумя спектральными параметрами. Изучаются вопросы разрешимости для нелокальных краевых задач. Определяются, при каких значениях параметров обеспечивается единственность решения, при каких значениях параметров задача имеет бесконечное множество решений и при каких значениях параметров задача не имеет решения. Строятся решения, соответствующие регулярным и иррегулярным значениям параметров.

А. Халмурзаев
(Кыргызстан)

ЭЛЛИПТИКАЛЫК ТИПТЕГИ СИНГУЛЯРДЫК КОЗГОЛГОН МАСЕЛЕНИН ЧЫГАРЫЛЫШЫНЫН АСИМПТОТИКАСЫ

Аннотация. Макалада жогорку тартиптеги туундулардын астында кичине параметр катышкан экинчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес эллиптикалык типтеги жекече туундулу дифференциалдык теңдеме каралат. Бул теңдеменин чыгарылышы үчүн Дирихленин шарты коюлган. Тиешелүү козголбогон маселе регулярдык өзгөчө айланага ээ болгон бисингулярдык козголгон экинчи тартиптеги сызыктуу бир тектүү эмес эллиптикалык типтеги жекече туундулуу дифференциалдык теңдеме үчүн Дирихленин маселесинин чыгарылышынын жашашы, жалгыздыгы жана чыгарылыштын чектелгендиги далилденет. Изилдөөнүн максаты – Дирихле маселесинин чыгарылышынын жашашын, жалгыздыгын далилдөө жана чыгарылыштын асимптотикасын тургузуу. Колдонулуучу усулдар: өзгөртүп түзүү, дифференциалдык барабарсыздык, кичинекей параметр усулдары.

К. Тампагаров, Т. Нарымбетов, А. Мурзабаева
(Кыргызстан)

ATTRACTION DOMAIN AND BOUNDARY LAYER LINES OF SOLUTIONS TO SYSTEMS OF SINGULARLY PERTURBED EQUATIONS

Abstract. In this paper, problem (1)–(2) is investigated for the existence and interrelationships of boundary layer lines, regions and areas o f attraction according t o conditions C1–C2.

B. Abdurakhimov, Sh. Hodiev
(Узбекистан)

STUDY OF EXTREME RATIOS OF MOISTURE AND BIOME FOR THE CENTRAL ASIAN REGION

Abstract. Provides a study of modeling the interaction of biosphere-atmospheric systems using a simplified model, as many instances of equilibrium and climate variability emphasize the importance of weather in physical modeling. A simplified model of the biosphere and atmospheric system consists of equilibrium reactions of vegetation and precipitation to each other, representing the effects of internal variability of the atmosphere.

A. Ashyralyev
(Turkey)

DEPENDENT SOURCE IDENTIFICATION PROBLEM FOR TELEGRAPH DIFFERENTIAL AND DIFFERENCE EQUATIONS

Abstract. In the present study, a time-dependent identification problem for telegraph differential and difference equations is studied. The stability of these problems is established. Some numerical results are presented. This work is jointly with Haitham Al Hazaimeh.

A. Erdogan, A. Ashyralyev
(USA)

SOURCE IDENTIFICATION PROBLEMS FOR TRANSPORT DIFFERENTIAL AND DIFFERENCE EQUATIONS

Abstract. Source identification problems for transport differential and difference equations are studied. Stability estimates for solution differential and difference problems are obltained.

Секция III

Интегро-дифференциальные и операторные уравнения

А.Т. Алымбаев, Ж.М. Солтонкулова, Т. Мурзаев
(Кыргызстан)

ПОСТРОЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С НЕЛИНЕЙНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Аннотация. Методы малого параметра, представляют собой одно из наиболее эффективных методов изучения задачи Коши и краевых задач дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений. Эти методы позволяют получить приближенные аналитические представления решений линейных и нелинейных краевых задач как для обыкновенных дифференциальных, интегро-дифференциальных уравнений, так и для уравнений в частных производных содержащий малый параметр. В статье алгоритмы метода интегро-дифференциальных уравнений применяются для построения асимптотического решения дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром с нелинейным краевым условием.

Ключевая слова: малый параметр; асимптотическое решение; метод интегро-дифференциальных уравнений; краевая задача.

Рассмотрим краевую задачу, с нелинейным краевым условием

$$\frac{d^2x(t,\varepsilon)}{dt^2} = l(t) + \varepsilon f\left(t, x(t,\varepsilon)\right), \tag{1}$$

$$aF\left(x(0,\varepsilon)\right) + bx(T,\varepsilon) = d \tag{2}$$

где a, b, d – вещественные числа, ε – малый параметр.

Краевую задачу (1), (2) приводим к задаче Коши

$$\begin{gathered}\frac{d^2x(t,\varepsilon)}{dt^2} = l(t) + \varepsilon f\left(t, x(t,\varepsilon)\right) - \frac{2}{T^2}\int_0^T\int_0^s\left[l(\tau) + \varepsilon f\left(\tau, x(\tau,\varepsilon)\right)\right]dsd\tau + \\ \frac{+2}{T^2}\left[b^{-1}d - b^{-1}aF\left(a_0 + \varepsilon a_1 + \cdots\right) - a_0 - \varepsilon a_1 - \cdots - \left(b_0 + b_1\varepsilon + \cdots\right)\right]\end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{cases} x(0,\varepsilon) = a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \cdots \\ x'(0,\varepsilon) = b_0 + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2 + \cdots \end{cases} \tag{4}$$

где a_k, b_k – подлежащие к определению числа $(k = 0,1,2,\ldots)$.

Асимптотическое разложение задачу Коши (3), (4) ищем в виде

$$x(t,\varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \cdots. \tag{5}$$

Поставляя разложение в (5) в уравнении (3), разлагая правую часть в ряд по степеням малого параметра ε и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим для коэффициентов $x_0(t), x_1(t)$ разложении (5), задачу Коши

$$\begin{gathered} x_0''(t) = l(t), x_0(0) = a_0, x_0'(0) = b_0 = \\ \frac{1}{T}\left[b^{-1}d - b^{-1}aF(a_0) - a_0 - \int_0^T\int_0^s l(\tau)dsd\tau\right]. \end{gathered} \tag{6}$$

$$x_1''(t) = f(t, x_0(t)), x_1(0) = a_1, x_1'(0) = b_1 =$$
$$-\frac{1}{T}\left[\left(b^{-1}aF'(a_0)+1\right)a_1 + \int_0^T\int_0^s f(\tau, x_0(\tau,\varepsilon))d\tau ds\right]. \qquad (7)$$

В качестве примера рассмотрим краевую задачу

$$x''(t,\varepsilon) = 3t + \varepsilon x(t,\varepsilon),\ 3e^{x(0,\varepsilon)} + 5x(1,\varepsilon) = 2. \qquad (8)$$

В данном случае $T = 1, a = 3, b = 5, d = 2, F(\varepsilon) = e^{x(0,\varepsilon)}$,

$l(t) = 3t, \varepsilon f(t,x) = x(t,\varepsilon)$.

Положив $a_0 = 0,5, a_1 = 0,7$ из (5), (6) относительно функции $x_0(t), x_1(t)$, получим задачи Коши вида

$$x_0''(t) = 3t, x_0(0) = 0,5, x_0'(0) = -0,386, \qquad (9)$$

$$x_1''(t) = 0,5 - 0,386 + 0,5t^3, x_1(0) = 0,7, x_1'(0) = 2,189.$$

Решая, задачи (9), (10) находим значение коэффициенты разложении (5):

$$x_0(t) = 0,5 - 0,386t + 0,5t^3,$$
$$x_1(t) = 0,7 + 2,189t + 0,25t^2 - 0,064t^3 + 0,025t^5.$$

Теорема. Согласно алгоритму метода интегро-дифференциальных уравнений, с точностью до $O(\varepsilon^2)$ порядка асимптотическое решение краевой задачи (14), (15) имеет вид

$$x(t,\varepsilon) = 0,5 - 0,386t + 0,5t^2 + \varepsilon\left(0,7 + 2,189t + 0,25t^2 - 0,064t^3 + 0,025t^5\right) + 0\left(\varepsilon^2\right).$$

Литература

1. *Алымбаев А.Т.* Численные, численно-аналитические методы исследования краевых задач / А.Т. Алымбаев. – Бишкек: Изд-во КНУ, 2015. – 175 с.
2. *Проскуряков А.П.* Метод Пуанкаре в теории нелинейных колебаний / А.П. Проскуряков. – М.: Наука, 1977. – 256 с.
3. *Алымбаев А.Т.* Численная реализация метода интегро-дифференциальных уравнений построения решения краевой задачи системы дифференциальных уравнений с малым параметром / А.Т. Алымбаев, Н. Сагынбай кызы // Вестник Иссык-Кульского университета, Каракол. – 2017. – № 44. – С. 20–23.
4. *Найфе А.* Методы возмущений / А. Найфе. – М.: Мир, 1976. – 455 с.

А.Т. Алымбаев, Ж.М. Солтонкулова, Т. Мурзаев
(Кыргызстан)

ИССЛЕДОВАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ В СЛУЧАЕ РЕГУЛЯРНОГО ВОЗМУЩЕНИЯ

Аннотация. Математические модели ряда физических и механических задач, могут быть описаны с помощью краевых задач дифференциальных уравнений или системы дифференциальных, интегро-дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр. Задача такого рода в общем случае не может быть решена точно. В данной работе асимптотическое разложение решений краевой задачи интегро-дифференциального уравнения второго порядка с малым параметром построено методом интегро-дифференциальных уравнений. Получена оценка погрешности между асимптотическим решением уравнений и их приближениями.

Ключевые слова: асимптотическое решение; метод интегро-дифференциальных уравнений; краевые задачи; малый параметр; оценка погрешности.

Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{d^2x(t,\varepsilon)}{dt^2} = g(t) + \varepsilon\left(f(t,x) + \int_0^T K(t,s)\,x(s,\varepsilon)\,ds\right) \tag{1}$$

$$ax(o,\varepsilon) + bx(T,\varepsilon) = d\,, \tag{2}$$

где a,b,d – вещественные числа, ε – малый параметр. Функция $f(t,x)$ достаточно гладкая функция относительно переменных t,x.

Краевую задачу приводим, к исследованию задачи Коши вида

$$\begin{aligned}\frac{d^2x(t,\varepsilon)}{dt^2} &= g(t) + \varepsilon\left(f(t,x(t,\varepsilon)) + \int_0^T K(t,s)\,x(s,\varepsilon)\,ds\right) - \\ &-\frac{2}{T^2}\int_0^T\int_0^s\left[g(\tau) + \varepsilon f(\tau,x(\tau,\varepsilon)) + \varepsilon\int_0^T K(\tau,s)\,x(s,\varepsilon)\,ds\right]ds\,d\tau + \\ &\frac{+2}{T^2}\left[b^{-1}d - \left(b^{-1}a+1\right)\left(a_0 + a_1\varepsilon + \cdots\right) - T\left(b_0 + \varepsilon b_1 + \cdots\right)\right]\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{cases} x(0,\varepsilon) = a_0 + a_1\varepsilon + a_2\varepsilon^2 + \cdots \\ x'(0,\varepsilon) = b_0 + b_1\varepsilon + b_2\varepsilon^2 + \cdots \end{cases} \tag{4}$$

где a_k, b_k – неизвестные постоянные, подлежащие определению.

Асимптотическое решение задачи Коши (3), (4) ищем в виде

$$x(t,\varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \cdots. \tag{5}$$

Поставляя разложение (5) в уравнении (3) и разлагая правую часть по степенями малого параметра ε, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получим для коэффициентов разложения систему рекуррентных задач Коши вида

$$x_0''(t)=g(t),x_0(0)=a_0$$
$$x_0'(0)=\frac{1}{T}\left[b^{-1}d-\left(b^{-1}a+1\right)a_0-\int_0^T\int_0^s g(\tau)d\tau ds\right]. \tag{6_0}$$

$$x_n''(t)=f'\left(t,x_0(t)\right)x_{n-1}(t)+g_{n-2}\left(t,x_0,x_1,\ldots,x_{n-2}\right)+\int_0^T K(t,s)x_{n-1}(s)ds,$$

$$x_n(0)=a_n,\ x_n'(0)=b_n=\frac{1}{T}\left[\left(b^{-1}a+1\right)a_n-\right. \tag{6_n}$$

$$\left.-\int_0^T\int_0^s\left[f_x'\left(s,x_0(s)\right)x_{n-1}(s)+g_{n-2}\left(t,x_0,x_1,\ldots,x_{n-2}\right)+\left|+\int_0^T K(\tau,s)x_{n-1}(s)ds\right]dsd\tau\right].$$

Решая систему рекуррентных задачи Коши $(6_0),(6_1)-(6_n)$, определяем коэффициенты асимптотического разложения, при любых значения n и, тем самым, построим асимптотическое разложение решения краевой задачи (1), (2).

Положим $x^0(t,\varepsilon)=u(t,\varepsilon)+X_n(t,\varepsilon),$, тогда из уравнения (1) относительно функции $u(t,\varepsilon)$ получим уравнение

$$u''(t,\varepsilon)=\varepsilon\Big[f\left(t,u(t,\varepsilon)+X_n(t,\varepsilon)\right)-f\left(t,X_n(t,\varepsilon)\right)+$$
$$+\int_0^T K(t,s)\left(u(t,s)+X_n(s,\varepsilon)-X_n(s,\varepsilon)\right)ds\Big]+g(t)+$$
$$+\varepsilon\left(f\left(t,X_n(t,\varepsilon)\right)+\int_0^T K(t,s)X_n(s,\varepsilon)ds\right)-X_n(t,\varepsilon).$$

Справедливо утверждение.

Теорема. Предположим, что функция $f(x,y)$ бесконечно дифференцируемая по x и в области $(t,x)\in[0,T]\times D, D\subset R=(-\infty,+\infty)$ функции $f_x'(t,x),K(t,s)$ удовлетворяют условиям

$$\left|f_x(t,x)\right|\le K_1,\vee K(t,s)\vee\le K_2,$$

тогда для разности $x^0(t,\varepsilon)-X_n(t,\varepsilon)$ справедлива оценка.

$$\left|x^0(t,\varepsilon)-X_n(t,\varepsilon)\right|\le\frac{1+T+\frac{T^2}{2}}{1-\varepsilon\frac{T^2}{2}K_1-\varepsilon\frac{T^3}{2}K_2}O\left(\varepsilon^{n+1}\right).$$

Литература

1. *Алымбаев А.Т.* Численные, численно-аналитические методы исследования краевых задач / А.Т. Алымбаев. – Бишкек: Изд-во КНУ, 2015.
2. *Проскуряков А.П.* Метод Пуанкаре в теории нелинейных колебаний / А.П. Проскуряков. – М.: Наука, 1977. – 256 с.
3. *Алымбаев А.Т.* Численная реализация метода интегро-дифференциальных уравнений построения решения краевой задачи системы дифференциальных уравнений с малым параметром / А.Т. Алымбаев, Н. Сагынбай кызы // Вестник Иссык-Кульского университета. Каракол, 2017. – № 44. – С. 20–23.

4. *Алымбаев А.Т.* Об одном суммарно-разностном методе построения асимптотического решения краевой задачи нелинейного разностного уравнения с малым параметром / А.Т. Алымбаев // Alatoo Academics Studies. – Бишкек. – 2019. – № 4. – С. 17–21.
5. *Найфе А.* Методы возмущений / А. Найфе. – М.: Мир, 1976. – 455 с.

А. Асанов, Т.О. Бекешов
(Кыргызастан)

ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НЕКЛАССИЧЕСКИХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА I РОДА В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

Аннотация. Теория и приложения интегральных уравнений исследовались во многих работах. В данной работе на основе модификации метода исследования, предложенного М. Иманалиевым и А. Асановым, доказаны теоремы единственности в пространстве непрерывных функций для решения системы неклассических линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с недифференцируемыми ядрами, причем ядра на диагонали могут быть равны нулю в конечных точках. Полученные результаты можно применять для исследования некоторых прикладных задач.

Ключевые слова: интегральные уравнения; пространство функций; единственность решений; ядро; норма.

Рассмотрим следующую систему:

$$\int_{\alpha(t)}^{t} K(t,s)u(s)\,ds = f(t), t \in [t_0;T], \tag{1}$$

где $\alpha(t)$ – известная функция, причем $\alpha(t_0) = t_0, \alpha(t) \le t$ при $t \in [t_0;T], K(t,s)-$ заданная матрица функция размера $n \times n$ с элементами $K_{ij}(t,s)$, определенные в области $G = \{(t,s) : t_0 \le t \le T, \alpha(t) \le s \le t\}$ и $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$ – известная вектор функция в $t \in [t_0;T]$, при этом $f_i(t_0) = 0, i = 1,2,\dots n$, а $u(t)-$ искомая вектор функция $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))$ на $t \in [t_0;T]$.

Теория и приложения интегральных уравнений исследовались во многих работах. В данной работе на основе модификации метода исследования, предложенного М. Иманаливым и А. Асановым, доказаны теоремы единственности для решения системы неклассических линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода с недифференцируемыми ядрами, причем ядра на диагонали могут быть равны нулю в конечных точках. Кроме того, получена формула для определения $u_0(t)$. Полученные результаты можно применять для исследования некоторых прикладных задач.

Обозначим $C_n[t_0;T]-$ пространство всех *n*-мерных векторных функций с элементами из пространства $C[t_0;T]$ непрерывных на отрезке $[t_0;T]$ функций.

Для векторов $u = (u_1, u_2, \dots u_n)$ и $v = (v_1; v_2 + \dots + v_n) \in R^n$ определим скалярное произведение векторов $(u,v) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \dots + u_n v_n$ и норму $\| u \| = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

В пространстве $C_n[t_0;T]$ норму определим для векторной функции $u(t)$: $\| u(t) \|_0 = \mathrm{Sup}_{t \in [[_0;T]} \| u(t) \|$, а для матриц $A = (a_{ij}) : \| A \| = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2\right)^2$.

Допустим, что $\det\left[K(t,t)\right]$ может обращаться в нуль конечное или счетное число раз в $\left[t_0;T\right]$.

Пусть $\lambda_i(t)-$ собственные значения матрицы $\frac{1}{2}\left[K(t,t)+K^*(t,t)\right]$, где $K^*(t,t)-$ сопряженная матрица $K(t,t)$ и

$$\lambda(t)=\min_i \lambda_i(t), t\in\left[t_0;T\right] \tag{2}$$

Потребуем выполнение следующих условий:

a) $\alpha(t)\in C^1\left[t_0;T\right], \alpha^1(t)>0$ почти для всех $t\in\left[t_0;T\right]$,

$\alpha(t_0)=t_0, \alpha(t)\le t$ для всех $t\in\left[t_0;T\right]$;

b) при любых фиксированных $t\in\left[t_0;T\right]$:

$\| K(t,s)\| \in L_1(\alpha(t),t), \| K(t,t)\| \in L_1(t_0;T), \| k(t,t)\| \le N_0\lambda(t)$, при все $t\in\left[t_0;T\right]$, $\lambda(t)>0$ почти для всех $t\in\left[t_0;T\right]$, где $\lambda(t)$ определена по формуле (2);

c) при $t>\tau$ для всех $(t,s)_{и}\ (\tau,s)\in G$ справедлива

$$\| K(t,s)-K(\tau,s)\| \le \ell(s)\int_\tau^t \lambda(\tau)d\tau,$$

где $\ell(t)\in L_1(t_0;T), \ell(t)\ge 0$ при $t\in\left[t_0;T\right]$.

Теорема. Пусть выполняется условие a) – c) и

$\gamma_1=\exp\left[\left(2e^{-1}+1\right)\int_{t_0}^T l(s)ds\right]\gamma_0$, где γ_0 – некоторое постоянное.

Тогда решение уравнения (1) в пространстве $C\left[t_0;T\right]$ единственно.

Доказательство. Пусть $u(t)\in C\left[t_0;T\right]$ является решением уравнения (1) при $f(t)=0$.

Тогда $\int_{\alpha(t)}^t K(s,s)u(s)ds+\int_{\alpha(t)}^t\left[K(t,s)-K(s,s)\right]u(s)ds=0t\in\left[t_0,T\right]$ согласно теореме о среднем и условию в):

$$u(t^*)\int_{\alpha(t)}^t K(s,s)ds\le\int_{\alpha(t)}^t l(s)\int_s^t\lambda(\tau)d\tau\le\int_{\alpha(t)}^t l(s)\left[\int_s^t K(\tau,\tau)d\tau\right]ds\le$$
$$\le\left[\int_{\alpha(t)}^t l(s)ds\right]\left[\int_{\alpha(t)}^t K(\tau_1\tau)d\tau\right],$$

где $\alpha(t)\le t^*\le t\ t\in\left[t_0;T\right]$.

Далее имеем:

$$u(t^*)\le\int_{t_0}^t l(s)ds, t_0\le\alpha(t)\le t^*\le t.$$

Переходя к пределу при $t\to 0$ получаем $u(t_0)=0$.

Тогда произведя оценивание получим

$$\| u(t)\|_c\le\frac{M_1}{1-\gamma_1}\left[2\omega_u-\left(\varepsilon^\beta\right)+4\| u(t)\|_c\, e^{-\varepsilon^{\beta-1}}\right],$$

где $M_1 = \exp\left[\sqrt{n}\left(2e^{-1} + N_0\right)\int_{t_0}^{T} l\left(s\right) ds\right], \gamma_1 = M_1\gamma_0 N_0\sqrt{n} < 1$

Отсюда, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, имеем $\| u(t) \|_c = 0$.

Литература

1. *Асанов А.* Об одном классе неклассических линейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода / А. Асанов, Т.О. Бекешов // Вестник Кыргызско-Турецкого университета Манас. – 2020. – № 2.
2. *Бекешов Т.О.* Интегралдоонун эки чеги тен озгормо болгон 1-турдогу сызыктуу эмес интегралдык тендеменин чечимин регуляризациялоо параметрин тандоо / Т.О. Бекешов // Журнал «Известия вузов». – 2016. – № 8.
3. *Бекешов Т.О.* Выбор параметра регуляризации решения нелинейного уравнения 1-го рода с двумя переменными пределами интегрирования / Т.О. Бекешов // Журнал «Известия вузов». – 2016. – № 8.
4. *Иманалиев М.И.* Регуляризация и единственность решений систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода / М.И. Иманалиев, М.И. Асанов // Доклад РАН. – 2007. – № 1. – С. 14–17.
5. *Иманалиев М.И.* О решениях систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода / М.И. Иманалиев, А. Асанов // Доклады РАН. – 2007. – № 6. – С. 1–4.

А.Т. Байдаулет, К.М. Сулейменов
(Казахстан)

О ВЛОЖЕНИИ В ПРОСТРАНСТВО ЛОРЕНЦА

Аннотация. В работе изучается оценка сверху неотрицательной невозрастающей функции и пространства $L^p(0,1)$ через модуль непрерывности переменного приращения $\omega_{p,\alpha,\psi}(f,\delta)$. Показано, что для приращения функции вида $f(x) - f(x + h\varphi(x))$ в оценке модуля непрерывности примет вид $\omega\left(f, \frac{\delta}{\varphi(\delta)}\right)$. Также сформулирована теорема вложения в пространства Лоренца в далеком случае.

Ключевые слова: модуль непрерывности переменного приращения; оценка сверху; пространства Лоренца.

1. Введение

Пусть $\omega(\delta)$ – непрерывная на [0,1] функция, удовлетворяющая условиям:

$$0 = \omega(0) \le \omega(\delta) \le \omega(\delta + \mu) \le \omega(\delta) + \omega(\mu), (0 \le \delta \le \delta + \mu \le 1).$$

Такие функции называют модулями непрерывности.

Пусть $1 \le p < \infty$ и $f(x) \in L^p(0,1)$. Функция

$$\omega_p(f,\delta) = \sup_{0<h<\delta}\left(\int_0^{1-h} | f(x+h) - f(x) |^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} (0 < \delta \le 1)$$

называется модулем непрерывности (в L^p) функции $f(x)$.

Пусть $1 \le p < \infty, 0 \le \alpha < 1, \psi(x)$ – слабоколеблющаяся функция.

Пусть $f \in L^p(0,1)$, тогда функцию

$$\omega_{p,\alpha,\psi}(f,\delta) = \sup_{0<h\le\delta}\left(\int_{E_{h,\alpha,\psi}}\left|f\left(x+hx^\alpha\psi(x)\right)-f(x)\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} (0<\delta<1), \tag{1}$$

где $E_{h,\alpha,\psi} = \left\{x \in (0,1) : x + hx^\alpha\psi(x) \in (0,1)\right\}$, назовем модулем непрерывности переменного специального вида приращения функции f в $L^p(0,1)$.

Заметим, что Z. Ditzian и V. Totik [1], ввели и изучали общий случай, который получается при замене в определении (1) функции $x^\alpha\psi(x)$ на непрерывную на $[0,1]$ функцию $\varphi(x)$.

Ясно, что, при $\alpha = 0$ и $\psi(x) = 1$ имеем $\omega_{0,p}(f,\delta) = \omega_p(f,\delta)$.

Теорема А. [2, с. 387]. Если $f(x) \in L^p(0,1), p \ge 1$, то

$$F(x) = \int_0^x f(x)dt \le 2^{\frac{1}{p}} x\left[\| f \|_p + \int_x^1 \frac{\omega(t,f)}{t^{1+\frac{1}{p}}}dt\right], 0 < x \le \frac{1}{2}.$$

Определение 1. [3, с. 29]. Положительная функция $\psi(x)$, определенная для $x > x_0$ называется слабо колеблющейся, если при любом $\delta > 0$ функция $x^\delta\psi(x)$ при достаточно больших x возрастает, а $x^{-\delta}\psi(x)$ убывает.

Если $\psi(x)$ слабо колеблющаяся функция, то для любого фиксированного $k > 0$

$\psi(kx) \simeq \psi(x), x \to \infty$,

причем это соотношение выполняется даже равномерно на каждом отрезке вида $\eta \le k \le \dfrac{1}{\eta}, 0 < \eta < 1$.

Теорема В. [4, с. 285]. Пусть даны числа $1 < p, \infty \le \alpha < 1$. Тогда для любой функции $f \in L^p(0,1)$, имеет место неравенство

$$f^*(x) \le C(p,\alpha)\left\{\int_x^1 \frac{\omega_{\alpha,p}(f^*,t)}{t^{\alpha+1+\frac{1}{p}}}dt + \| f \|_p\right\}(0 < x \le 1).$$

Теорема С. [5, с. 285]. Пусть даны числа $1 < p < \infty, 0 \le \alpha < 1$. Тогда для любой невозрастающей неотрицательной функции $f \in L^p(0,1)$ справедливо неравенство

$$f(x) \le C(p,\alpha)\left\{\int_x^1 \frac{\omega\left(f, 2^{-1}\left(2^{\frac{2}{1-\alpha}}-1\right)t^{1-\alpha}\right)}{t^{1+\frac{1}{p}}}dt + \| f \|_p\right\}(0 < x \le 1).$$

1. Оценка сверху невозрастающей неотрицательной функции

Теорема 1. Пусть даны числа $1 < p < \infty, 0 \le \alpha < 1$. Тогда для любой невозрастающей неотрицательной функции $f \in L^p(0,1)$ справедливо неравенство

$$f(x) \le C(p,\alpha,\psi)\left\{\int_x^1 \frac{\omega_{p,\alpha,\psi}\left(f, C(\alpha,\psi)\dfrac{t}{t^\alpha \psi(t)}\right)}{t^{1+\frac{1}{p}}} dt + \| f \|_p \right\} (0 < x \le 1). \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $f \in L^p(0,1)$. Выберем число $k_0 \in N$ так, что $k_0 \ge \log_2\left(2^{2+2\alpha}+1\right)$ и $\psi\left(\dfrac{1}{2^{k_0}}\right) \ge 1$. Определим последовательность h_k следующим образом:

$$h_k = \frac{C(\alpha,\psi)}{2^{k(1-\alpha)}\psi\left(\dfrac{1}{2^k}\right)}, \tag{2}$$

где $C(\alpha,\psi) = 2^{2+2\alpha}$ и целое $k \ge k_0$.

Пусть целое $k \ge k_0$ и пусть $\dfrac{1}{2^{k+1}} < x \le \dfrac{1}{2^k}$.

Тогда имеют место следующие неравенства:

$$\frac{1}{2^{(k+1)\alpha}} < x^\alpha \le \frac{1}{2^{k\alpha}}, \tag{3}$$

$$0 < h_k < 1,$$

$$\begin{aligned} &x + h_k x^\alpha \psi(x) \le \frac{1}{2^k} + \frac{C(\alpha,\psi)}{2^k \psi\left(\dfrac{1}{2^k}\right)} \frac{1}{2^{k\alpha}} \psi\left(\frac{1}{2^k}\right) < 1, \\ &x + h_k x^\alpha \psi(x) \le \frac{1}{2^k} + \frac{C(\alpha,\psi)}{2^k} \frac{1}{2^{k\alpha}} < 1, \end{aligned} \tag{4}$$

$$x + \frac{C(\alpha,\psi)}{2^k \psi\left(\dfrac{1}{2^k}\right)} x^\alpha \psi(x) > \frac{1}{2^{k-1}}. \tag{5}$$

Действительно, при $k \ge k_0$, имеем

$$h_k = \frac{C(\alpha,\psi)}{2^k \psi\left(\dfrac{1}{2^k}\right)} = \frac{2^{2+2\alpha}}{2^k \psi\left(\dfrac{1}{2^k}\right)} \le \frac{2^{2+2\alpha}}{2^{k_0} \psi\left(\dfrac{1}{2^{k_0}}\right)} \le \frac{2^{2+2\alpha}}{2^{2+2\alpha}+1} < 1,$$

тем самым, неравенство (3) доказано.

Пусть целое $k \ge k_0$ и пусть $\frac{1}{2^{k+1}} < x \le \frac{1}{2^k}$, справедливо

$$\frac{1}{2^k} + \frac{C(\alpha,\psi)}{2^{k(1-\alpha)}\psi\left(\frac{1}{2^k}\right)} \frac{1}{2^{k\alpha}}\psi\left(\frac{1}{2^k}\right) = \frac{1}{2^k} + \frac{C(\alpha,\psi)}{2^{k-k\alpha}2^{k\alpha}} =$$

$$\frac{1}{2^k} + \frac{C(\alpha,\psi)}{2^k} = \frac{1 + C(\alpha,\psi)}{2^k} = \frac{1}{2^k}\left[1 + C(\alpha,\psi)\right] \le$$

$$\frac{1}{2^{k_0}}\left(1 + 2^{2+2\alpha}\right) \le \frac{2^{2+2\alpha}+1}{2^{2+2\alpha}+1} = 1,$$

то есть неравенство (4) доказано. При целом целое $k \ge k_0$ и $\frac{1}{2^{k+1}} < x \le \frac{1}{2^k}$, получим

$$x + \frac{C(\alpha,\psi)}{2^{k(1-\alpha)}\psi\left(\frac{1}{2^k}\right)} x^\alpha \psi(x) > \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{C(\alpha,\psi)}{2^{k(1-\alpha)}\psi\left(\frac{1}{2^k}\right)^{2^{(k+1)\alpha}}} \psi\left(x\frac{1}{2^{k+1}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{C(\alpha,\psi)}{2^{k(1-\alpha)}\psi\left(\frac{1}{2^k}\right)} \frac{1}{2^{\left(k+1^\alpha\right)}} \frac{1}{2^{k+1^\alpha}} \frac{1}{2^{-(k+1)^\alpha}} \psi\left(x\frac{1}{2^{k+1}}\right) \ge$$

$$\ge \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{C(\alpha,\psi)}{2^{k+\alpha}\psi\left(\frac{1}{2^k}\right)} \frac{1}{2^{\left(k+1^\alpha\right)}} \frac{1}{2^{-(k+1)^\alpha}} \psi\left(x\frac{1}{2^{k+1}}\right) \ge$$

$$\ge \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{C(\alpha,\psi)}{2^{k+2\alpha+k\alpha}\psi\left(\frac{1}{2^k}\right)} \frac{1}{2^{-k\alpha}} \psi\left(x\frac{1}{2^k}\right) =$$

$$= \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{C(\alpha,\psi)}{2^{k+2\alpha}} = \frac{1}{2^{k-1}}\left[\frac{1}{2^2} + \frac{C(\alpha,\psi)}{2^{2+2\alpha}}\right] = \frac{1}{2^{k-1}}\left[\frac{1}{4}+1\right] \ge \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Стало быть, неравенство (5) доказано. Теперь перейдем к оценке снизу модуля непрерывности $\omega_{\alpha,p,\psi}(f.t)(0 < t < 1)$. Сначала, докажем, что

$$E_{h,k,\alpha,\psi} \supset \left[\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}\right]. \qquad (6)$$

Действительно, при $\frac{1}{2^{k+1}} < x \le \frac{1}{2^k}$ и $C(\alpha,\psi) = 2^{2+2\alpha}$ имеем

$$x + h_k x^\alpha \psi(x) \ge \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{2}{2^k} > \frac{1}{2^k},$$

тем самым (6) доказано. Из соотношения (6) имеем

$$\omega_{\alpha,p,\psi}\left(f,\frac{C(\alpha,\psi)}{2^{k(1-\alpha)\psi\left(\frac{1}{2^k}\right)}}\right)\geq\left\{\int_{\frac{1}{2^{k+1}}}\int_{2^k}\left|f(x)-f\left(x+\frac{C(\alpha,\psi)}{2^{k(1-\alpha)\psi\left(\frac{1}{2^k}\right)}}x^{\alpha}\psi\left(\frac{1}{2^k}\right)\right)dx\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Так как $\frac{1}{2^k}-\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2^k}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2^k}\frac{1}{2}=\frac{1}{2^{k+1}}$, то, в силу (5), получим

$$\omega_{\alpha,p,\psi}\left(f,\frac{C(\alpha,\psi)}{2^{k(1-\alpha)\psi\left(\frac{1}{2^k}\right)}}\right)\geq C_1(\alpha,\psi)\frac{1}{2^{\frac{k}{p}}}\left[f\left(\frac{1}{2^k}\right)-f\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)\right].$$

Отсюда

$$\left[f\left(\frac{1}{2^k}\right)-f\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)\right]\leq C_2(\alpha,\psi)2^{\frac{k}{p}}\omega_{\alpha,p,\psi}\left(f,\frac{C(\alpha,\psi)}{2^{k(1-\alpha)\psi\left(\frac{1}{2^k}\right)}}\right). \tag{7}$$

Покажем, что имеет место неравенство

$$2^{\frac{k}{p}}\omega_{\alpha,p,\psi}\left(f,\frac{C(\alpha,\psi)}{2^{k(1-\alpha)\psi\left(\frac{1}{2^k}\right)}}\right)\ll\int_{\frac{1}{2^k}}^{\frac{1}{2^{k-1}}}\frac{\omega_{\alpha,p,\psi}\left(f,C(\alpha,\psi)\frac{t}{t^{\alpha}\psi(t)}\right)}{t^{\frac{1}{P^{+}}}}dt. \tag{8}$$

Действительно, в силу монотонности модуля непрерывности, получим

$$\int_{\frac{1}{2^k}}^{\frac{1}{2^{k-1}}}\frac{\omega_{\alpha,p,\psi}\left(f,C(\alpha,\psi)\frac{t}{t^{\alpha}\psi(t)}\right)}{t^{\frac{1}{P}+1}}dt\gg\omega_{\alpha,p,\psi}\left(f,\frac{C(\alpha,\psi)}{2^{k(1-\alpha)\psi\left(\frac{1}{2^k}\right)}}\right)\int_{\frac{1}{2^k}}^{\frac{1}{2^{k-1}}}t^{-\frac{1}{p}-1}dt$$

далее,

$$\int_{\frac{1}{2^k}}^{\frac{1}{2^{k-1}}}t^{-\frac{1}{p}-1}dt=\frac{1}{-\frac{1}{p}}\frac{1}{\frac{1}{p}}\Bigg|_{\frac{1}{2^k}}^{2^{\frac{1}{k-1}}}=p\left[2^{\frac{k}{p}}-2^{\frac{k-1}{p}}\right]=p2^{\frac{k}{p}}\left[1-\frac{1}{2^{\frac{1}{p}}}\right)\gg\alpha,p,\psi 2^{\frac{k}{p}}.$$

Таким образом, соотношение (8) доказано. Из (7) и (8) имеем

$$\left[f\left(\frac{1}{2^k}\right)-f\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)\right]\ll\int_{\frac{1}{2^k}}^{\frac{1}{2^{k-1}}}\frac{\omega_{\alpha,p,\psi}\left(f,C(\alpha,\psi)\frac{t}{t^{\alpha}\psi(t)}\right)}{t^{\frac{1}{P^{+1}}}}dt. \tag{9}$$

Суммирую обе части (9), получим

$$\sum_{k=k_0+1}^{n}\left[f\left(\frac{1}{2^k}\right)-f\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)\right]\ll\sum_{k=k_0+1}^{n}\int_{\frac{1}{2^k}}^{\frac{1}{2^{k-1}}}\frac{\omega_{\alpha,p,\psi}\left(f,C(\alpha,\psi)\frac{t}{t^{\alpha}\psi(t)}\right)}{t^{\frac{1}{P}+1}}dt$$

стало быть,

$$\left[f\left(\frac{1}{2^n}\right)-f\left(\frac{1}{2^{k_0}}\right)\right]\ll\int_{\frac{1}{2^n}}^{\frac{1}{2^{k_0}}}\frac{\omega_{\alpha,p,\psi}\left(f,C(\alpha,\psi)\frac{t}{t^{\alpha}\psi(t)}\right)}{t^{\frac{1}{P}+1}}dt.$$

Воспользовавшись оценкой

$$\| f\|_p^p=\int_0^1\left|f(x)\right|^p dx\geq\int_0^{\lambda}\left|f(x)\right|^p dx\geq|f(x)|^p\lambda,$$

при $\lambda=\frac{1}{2^{k_0}}$ получим

$$f\left(\frac{1}{2^n}\right)\ll\left\{\int_{\frac{1}{2^n}}^{1}\frac{\omega_{\alpha,p,\psi}\left(f,C(\alpha,\psi)\frac{t}{t^{\alpha}\psi(t)}\right)}{t^{\frac{1}{P+1}}}dt+\| f\|_p\right\}.$$

Отсюда, для любого $0\leq x<1$, будем иметь

$$f(x)\ll\left\{\int_x^1\frac{\omega_{\alpha,p,\psi}\left(f,C(\alpha,\psi)\frac{t}{t^{\alpha}\psi(t)}\right)}{t^{\frac{1}{P}+1}}dt+\| f\|_p\right\}=$$

$$=\left\{\int_x^1\frac{\omega_{\alpha,p,\psi}\left(f,\left(2^{2+2\alpha}\right)\frac{t}{t^{\alpha}\psi(t)}\right)}{t^{\frac{1}{P}+1}}dt+\| f\|_p\right\},$$

тем самым, теорема 1 доказана полностью.

Замечание 1. [2, с. 388]. При $\alpha=0$ и $\psi(x)=1$ неравенство совпадает с оценкой Э.А. Стороженко.

Замечание 2. При $\psi(x)=1$ неравенство совпадает с оценкой теоремы А.

Теорема вложения в пространства Лоренца в далеком случае

Посредством теоремы 1 доказывается следующее утверждение:

Теорема 2. Пусть даны числа $1\leq p\leq\mu<\infty, 0<\nu<\infty, 0<\alpha<1$.

Пусть также дан модуль непрерывности $\omega(\delta)$, слабоколеблющаяся функция $\psi(x), x\in[0,1]$. Тогда для вложения

$$H^{\omega}_{\alpha,p,\omega} \subset L(\mu,\nu)$$

достаточно, а в случае, когда

$$\omega(\delta) = \mathrm{O}\left(\omega\left(\delta^2\right)\right)(0 < \delta < 1)$$

и необходимо

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^{\frac{k\nu}{1-\alpha}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{\mu}\right)-1} \omega^{\nu}\left(\frac{1}{k\psi\left(\frac{1}{k^{\frac{1}{1-\alpha}}}\right)}\right) < \infty .$$

Заключение. В данной работе получена оценка сверху неотрицательной невозрастающей функции посредством модуля непрерывности переменного приращения, в котором применена слабоколеблющаяся функция. Во второй части сформулирована теорема вложения в пространства Лоренца в далеком случае, т. е. когда $p < \mu, 0 < \nu < \infty$.

Литература

1. *Ditzian Z. and Toti. V.* Moduli of smothness. – New York: Springer, 1987.
2. *Стороженко Э.А.* Необходимые и достаточные условия для вложения некоторых классов функций / Э.А. Стороженко // ИАН СССР. Серия «Математика». – 1973. – Т. 37. – № 2. – С. 386–398.
3. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды / А. Зигмунд. Т. 1 – М.: Мир, 1965. – 616 с.
4. *Nguyen Xuan Ky.* Some embedding theorems concerning the moduli of Ditzian and Totik // Analysis Math. – 1993. –V. 19. – P. 255–265.
5. *Сулейменов К.* Критерий вложения в пространства Лоренца / К. Сулейменов, Н. Темиргалиев // Analysis Math. – 2006 – № 32. – С. 283–317.

А.И. Егоров

(Российская Федерация)

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА ВОЛЬТЕРРА

Аннотация. Рассматриваются интегро-дифференциальные уравнения, ядра которых не являются квазиполиномами. Решаются однородные и неоднородные уравнения. Устанавливаются их основные свойства.

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения; уравнения Вольтерра; однородные уравнения; неоднородные уравнения; квазиполиномы.

Рассматриваются уравнения вида

$$L(u) = \int_0^t K(t-s)\, M(u)\, ds + f(t), \tag{1}$$

в которых $L(u)$ и $M(u)$ – линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами порядка n и m, соответственно, а $K(t)$ не обязательно квазиполином.

Теорема 1. Несколько различных ИДУ могут иметь один и тот же характеристический полином. Однако общие решения у них различные.

Доказано, что задача Коши для линейных уравнений с постоянными коэффициентами может иметь многопараметрическое семейство решений и соответствущие интегральные линии могут пересекаться.

Пример 0.1. Уравнение

$$y(t)+\int_0^t \cos(t-s)\left[(s)s3+2\frac{d^2y(s)}{ds^2}+\frac{dy(s)}{ds}+2y(s)\right]ds=0 \qquad (2)$$

имеет общее решение, которое можно представить в виде

$$y(t)=C_1\cos(t)+C_2\sin(t)-C_1e^{-t}+(C_1-C_2)e^{-t}t,$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Этот результат интересен ещё и тем, что $y(t)$ удовлетворяет начальному условию $y(0)=0$ при произвольных C_1 и C_2, и, следовательно, задача Коши

$$y(t)+\int_0^t \cos(t-s)\left[\frac{d^3y(s)}{ds^3}+2\frac{d^2y(s)}{ds^2}+\frac{dy(s)}{ds}+2y(s)\right]ds=0,\ y(0)=0,$$

имеет двупараметрическое семейство решений. Более того, интегральные линии, соответствующие различным значениям параметров C_1 и C_2, пересекаются при различных положительных значениях t. Дифференциальный оператор третьего порядка, стоящий под знаком интеграла, также не определяет число произвольных постоянных в решении уравнения. Указан способ построения функции Грина для уравнений, общее решение которых зависит от двух произвольных постоянных. Используя эту функцию, можно решать неоднородные граничные задачи, а также исследовать нелинейные уравнения с естественными граничными условиями. Определены сопряженные интегро-дифференциальные операторы, а также соответствующие взаимно сопряжённые краевые задачи.

Пример 0.2. Пусть $y(x)$ – решение уравнения

$$L_2(y)+\int_0^t K(t-s)M_2(y(s))ds=0,$$

определённое на отрезке $[0,l]$.

Здесь

$$L_2(y)=y''+ay'+a_2y,\ M_2(y)=y''+ay'+b_2y.$$

Этому уравнению можно поставить в соответствие две взаимно сопряженные краевые задачи.

Следующие две краевые задачи являются взаимно сопряженными.

$$\begin{cases} L_2(y)+\int_0^t K(t-s)M_2(y(s))ds=0, \quad z(0)=z(l)=0, \\ L_2^*(z)+M_2^*\left[\int_t^l K(s-t)z(s)\right]ds=0, \quad \left[z'(t)+\frac{d}{dt}\left(\int_t^l K(s-t)z(s-t)z(s)ds\right)\right]_{t=0}, z(l)=0. \end{cases}$$

Т.Т. Каракеев, Г. Эсенаманова
(Кыргызстан)

РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ТРЕТЬЕГО РОДА С ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Аннотация. В работе исследованы вопросы регуляризации линейных двумерных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода в пространстве непрерывных функций. Обоснован метод регуляризации лаврентьевского типа, доказана сходимость регуляризованного решения к точному решению по равномерной метрике и единственность решения уравнения в пространстве непрерывных функций.

Ключевые слова: регуляризация; уравнение Вольтерра; равномерная сходимость; малый параметр.

В работах [1–3, 10] для интегральных уравнений Вольтерра третьего рода и в работах [1, 4, 6, 7, 11] одним из существенных условий для построения регуляризированных уравнений, которые обладают свойством вольтерровости и относятся к методам лаврентьевского типа [8, с. 49], является свойство монотонности известной функции $p(x)$ при искомой функции вне интеграла. Целью данного исследования является изучение возможности распространения метода регуляризации лаврентьевского типа на случай интегральных уравнений Вольтерра третьего рода с двумя независимыми переменными и оператором умножения на непрерывную функцию $p(x,y)$, которая является неубывающей либо невозрастающей по x функцией при всех y из заданного отрезка.

Рассмотрим линейное интегральное уравнение Вольтерра третьего рода

$$p(x,y)u(x,y)+\int_0^x K(x,y,s)u(s,y)ds+\int_0^x\int_0^y Q_0(x,y,s,\tau)u(s,\tau)d\tau ds=g(x,y), \quad (1)$$

где известные функции $p(x,y),\ K(x,y,s),\ Q_0(x,y,s,\tau),\ g(x,y)$ подчиняются условиям

1) $g(x,y), p(x,y)\in C(D), D=[0,b]\times[0,c]$;

$K(x,y,s)\in C(D_0),\ K(x,y,x)\ge 0, D_0=\{(x,y,s)\,/\,0\le s\le x\le b, 0\le y\le c\}$;

2) $G(x,y)\ge d_1>0$, $G(x,y)=C_0p(x,y)+K(x,y,x),\ 0<d_1, C_0=const$;

3) $Q_0(x,y,s,\tau)\in C(D_1),\quad D_1=\{(x,y,s,\tau)\,/0\le s\le x\le b,\ \ 0\le\tau\le y\le c\}$,

$Q_0(x,y,x,\tau)=0.$

Пусть I – тождественный оператор, J – оператор Вольтерра: $Jv=\int_0^x v(s,y)ds.$ Действуя оператором $I+C_0J$ на уравнение (1) получим уравнение вида

$$\begin{gathered}p(x,y)u(x,y)+\int_0^x G(s,y)u(s,y)ds=\int_0^x L(x,y,s)u(s,y)ds+\\+\int_0^x\int_0^y Q(x,y,s,\tau)u(s,\tau)d\tau ds+f(x,y),\end{gathered} \quad (2)$$

где $L(x,y,s)=K(s,y,s)-K(x,y,s)-C_0\int_s^x K(\nu,y,s)d\nu,$

$$Q(x,y,s,\tau)=-Q_0(x,y,s,\tau)-C_0\int_s^x Q_0(\nu,y,s,\tau)d\nu,\ f(x,y)=g(x,y)+C_0\int_0^x g(s,y)ds.$$

Рассмотрим уравнение с малым параметром ε из интервала (0,1):

$$\left(\varepsilon+p(x,y)\right)u_\varepsilon(x,y)+\int_0^x G(s,y)u_\varepsilon(s,y)ds=\int_0^x L(x,y,s)u_\varepsilon(s,y)ds+$$
$$+\int_0^x\int_0^y Q(x,y,s,\tau)u_\varepsilon(s,\tau)d\tau ds+\varepsilon u(0,y)+f(x,y). \tag{3}$$

Воспользуемся резольвентой

$$-\frac{1}{\varepsilon+p(x,y)}\exp\left(-\int_s^x\frac{G(\nu,y)d\nu}{\varepsilon+p(\nu,y)}\right)G(s,y),$$

ядра $\left(-G(s,y)/\left(\varepsilon+p(x,y)\right)\right)$ *и,* уравнение (3) приведем к следующему эквивалентному виду:

$$u_\varepsilon(x,y)=-\frac{1}{\varepsilon+p(x,y)}\int_0^x\exp\left(-\int_s^x\frac{G(\nu,y)d\nu}{\varepsilon+p(\nu,y)}\right)\frac{G(s,y)}{\varepsilon+p(s,y)}\left\{\int_0^s L(s,y,\nu)\times\right.$$
$$u_\varepsilon(\nu,y)d\nu-\int_0^x L(x,y,\nu)u_\varepsilon(\nu,y)d\nu+\int_0^s\int_0^y Q(s,y,\nu,\tau)u_\varepsilon(\nu,\tau)d\tau d\nu-$$
$$\left.-\int_0^x\int_0^y Q(x,y,\nu,\tau)u_\varepsilon(\nu,\tau)d\tau d\nu+f(s,y)-f(x,y)\right\}ds+\frac{1}{\varepsilon+p(x,y)}\times$$
$$\exp\left(-\int_0^x\frac{G(\nu,y)d\nu}{\varepsilon+p(\nu,y)}\right)\left\{\int_0^x L(x,y,s)u_\varepsilon(s,y)ds+\int_0^x\int_0^y Q(x,y,s,\tau)u_\varepsilon(s,\tau)d\tau ds+f(x,y)\right\}. \tag{4}$$

В теории интегральных уравнений важное значение имеет известное неравенство Гронуолла – Бельмана. Докажем двумерный аналог неравенства из [9, с. 59].

Лемма 2. Пусть для всех $0\le s\le x\le b,\ \ 0\le\tau\le y\le c$ функция $v(x,y)$ неотрицательна и удовлетворяет неравенству

$$v(x,y)\le c_1+c_2\int_0^x v(s,y)ds+c_3\int_0^x\int_0^y v(s,\tau)d\tau ds,$$

где c_1,c_2,c_3 – постоянные, $c_1>0,c_2\ge 0,c_3\ge 0.$ Тогда

$$v(x,y)\le c_1\exp\left(x\left(c_2+c_3y\right)\right).$$

Доказательство. Введем обозначение

$$w(x,y)=c_1+c_2\int_0^x v(s,y)\,ds+c_3\int_0^x\int_0^y v(s,\tau)\,d\tau ds.$$

Отсюда путем дифференцирования получим

$$w_x(x,y)=c_2 v(x,y)+c_3\int_0^y v(x,\tau)\,d\tau.$$

В силу неотрицательности функции $v(x,y)$ для $\tau\le y$ $w(x,\tau)\le w(x,y)$. Используя это неравенство и условие леммы 2 из соотношения

$$\frac{w_x(x,y)}{w(x,y)}=c_2\frac{v(s,y)}{w(x,y)}+c_3\int_0^y\frac{v(x,\tau)}{w(x,y)}d\tau$$

имеем

$$\frac{w_x(x,y)}{w(x,y)}\le c_2+c_3 y.$$

Учитывая, что $w(0,y)=c_1$, интегрируем последнее неравенство в пределах от 0 до x. Тогда

$$w(x,y)\le c_1\exp\left(x\left(c_2+c_3 y\right)\right).$$

Так как по условию $v(x,y)\le w(x,y)$, то получим требуемое неравенство.

Пусть

д) $g(0,y)=p(0,y)=0,\ \ p(x,y)>0,\ \forall x\in(0,b],\forall y\in[0,c],\ \ p(x,y)$ – неубывающая по x функция в области D;

ж) $M_2=C_0L_K+L_{K1},\ L_K=Lip(K(x,y,s)|x),\ L_{K1}=Lip(K_x(x,y,s)|x),$

$$M_3=C_0L_{Q_0}+L_{Q_1},L_{Q_0}=Lip(Q(x,y,v,\tau)|x),\ L_{Q1}=Lip(Q_x(x,y,v,\tau)|x).$$

Для оператора $(H_\varepsilon u)(x,y)$, заданного в виде

$$\begin{aligned}(H_\varepsilon u)(x,y)\equiv{}&\frac{\varepsilon}{\varepsilon+p(x,y)}\exp\left(-\int_0^x\frac{G(\nu,y)}{\varepsilon+p(\nu,y)}d\nu\right)\left[u(0,y)-u(x,y)\right]-\\&-\frac{\varepsilon}{\varepsilon+p(x,y)}\int_0^x\exp\left(-\int_s^x\frac{G(\nu,y)}{\varepsilon+p(\nu,y)}d\nu\right)\frac{G(s,y)}{\varepsilon+p(s,y)}\left[u(s,y)-u(x,y)\right]ds,\end{aligned}\tag{5}$$

имеет место [1]

Лемма 1. При выполнении условий а) – д) для $u(x,y)\in C(D)$ имеет место оценка

$$(H_\varepsilon u)(x,y)_{C(D)}\le 4(d_1e)^{-1}\varepsilon^{1-\beta}u(x,y)_{C(D)}+\omega_u\left(\varepsilon^\beta\right),$$

где $\|\cdot\|_{C(D)}=\max\limits_D|\cdot|,\ \ \omega_u\left(\varepsilon^\beta\right)=\sup\limits_{\substack{|x-s|\le\varepsilon^\beta\\ y\in[0,c]}}\left|u(x,y)-u(s,y)\right|,\ \ 0<\beta<1.$

Теорема 1. Пусть выполняются условия а) – ж), и уравнение (1) имеет решение $u(x,y)\in C(D)$. Тогда при $\varepsilon\to 0$ решение уравнения (3) равномерно сходится к решению уравнения (2). При этом имеет место оценка

$$u_\varepsilon(x,y)-u(x,y)_{C(D)}\le M_1\left(4(d_1 e)^{-1}\varepsilon^{1-\beta}u(x,y)_{C(D)}+\omega_u\left(\varepsilon^\beta\right)\right),$$

$$M_1=\exp\left(bM_0(1+c)\right),M_0=(M_2+M_3)d_1^{-1}\left(2+e^{-1}\right).$$

Доказательство. Положим $\eta_\varepsilon(x,y)=u_\varepsilon(x,y)-u(x,y)$, где $u(x,y)$ – решение уравнения (1). Тогда из (5) получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned}\eta_\varepsilon(x,y)=&-\frac{1}{\varepsilon+p(x,y)}\int_0^x\exp\left(-\int_s^x\frac{G(\nu,y)}{\varepsilon+p(\nu,y)}d\nu\right)\frac{G(s,y)}{\varepsilon+p(s,y)}\left\{\int_0^s L(s,y,\nu)\times\right.\\&\times\eta_\varepsilon(\nu,y)d\nu-\int_0^x L(x,y,\nu)\eta_\varepsilon(\nu,y)d\nu+\int_0^s\int_0^y Q(s,y,\nu,\tau)\eta_\varepsilon(\nu,\tau)d\tau d\nu-\\&\left.-\int_0^x\int_0^y Q(x,y,\nu,\tau)\eta_\varepsilon(\nu,\tau)d\tau d\nu+\varepsilon\left(u(s,y)-u(x,y)\right)\right\}ds+\\&+\frac{1}{\varepsilon+p(x,y)}exp\left(-\int_0^x\frac{G(\nu,y)d\nu}{\varepsilon+p(\nu,y)}\right)\left\{\int_0^x L(x,y,s)\eta_\varepsilon(s,y)ds+\right.\\&\left.+\int_0^x\int_0^y Q(x,y,s,\tau)\eta_\varepsilon(s,\tau)d\tau ds+\varepsilon\left[u(0,y)-u(x,y)\right]\right\}.\end{aligned}\tag{6}$$

Так как $p(x,y)$ неубывающая по x в области D, то при $\nu\le x$

$$\frac{1}{\varepsilon+p(x,y)}\le\frac{1}{\varepsilon+p(\nu,y)},(x,y)\in D\ .$$

Тогда используя условие $G(x,y)\ge d_1,(x,y)\in D,$ для функции

$$L_\varepsilon(x,y)=\frac{1}{\varepsilon+p(x,y)}\int_0^x\exp\left(-\int_s^x\frac{G(\nu,y)}{\varepsilon+p(\nu,y)}d\nu\right)\frac{G(s,y)}{\varepsilon+p(s,y)}(x-s)ds$$

получим

$$\left|L_\varepsilon(x,y)\right|\le d_1^{-1}\int_0^x\exp\left(-\int_s^x\frac{G(\nu,y)}{\varepsilon+p(\nu,y)}d\nu\right)\frac{G(s,y)}{\varepsilon+p(s,y)}\int_s^x\frac{G(\nu,y)}{\varepsilon+p(\nu,y)}d\nu ds=$$

$$=\left|\rho=W_\varepsilon(x,y,s)=\int_s^x\frac{G(\nu,y)}{\varepsilon+p(\nu,y)}d\nu\right|=d_1^{-1}\int_0^{W_\varepsilon(x,y,0)}e^{-\rho}\rho d\rho<d_1^{-1}\int_0^\infty e^{-\rho}\rho d\rho=d_1^{-1}.$$

Так как

$$\left|L(x,y,\nu)-L(s,y,\nu)\right|\le M_2(x-s),\left|Q(x,y,\nu,\tau)-Q(s,y,\nu,\tau)\right|\le M_3(x-s),$$

то

$$\left| -\frac{1}{\varepsilon + p(x,y)} \int_0^x \exp\left(-\int_s^x \frac{G(\nu,y)}{\varepsilon + p(\nu,y)} d\nu \right) \frac{G(s,y)}{\varepsilon + p(s,y)} \left\{ \int_0^s L(s,y,\nu) \times \right. \right.$$

$$\times \eta_\varepsilon(\nu,y)\,d\nu - \int_0^x L(x,y,\nu)\eta_\varepsilon(\nu,y)\,d\nu + \int_0^s\int_0^y Q(s,y,\nu,\tau)\eta_\varepsilon(\nu,\tau)\,d\tau d\nu -$$

$$\left. \left. -\int_0^x\int_0^y Q(x,y,\nu,\tau)\eta_\varepsilon(\nu,\tau)\,d\tau d\nu \right\} ds \right| \le 2(M_2 + M_3)\left|L_\varepsilon(x,y)\right| \left\{ \int_0^x \left|\eta_\varepsilon(\nu,y)\right| d\nu + \right.$$

$$\left. + \int_0^x\int_0^y \left|\eta_\varepsilon(\nu,\tau)\right| d\tau d\nu \right\};$$

$$\left| \frac{1}{\varepsilon + p(x,y)} exp\left(-\int_0^x \frac{G(\nu,y)d\nu}{\varepsilon + p(\nu,y)} \right) \left\{ \int_0^x L(x,y,s)\eta_\varepsilon(s,y)\,ds + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \int_0^x\int_0^y Q(x,y,s,\tau)\eta_\varepsilon(s,\tau)\,d\tau ds \right\} \right| \le (M_2 + M_3)\frac{d_1^{-1}}{\varepsilon + p(x,y)} \int_0^x G(\nu,y)\,d\nu \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon + p(x,y)} \int_0^x G(\nu,y)\,d\nu \right) \left\{ \int_0^x \left|\eta_\varepsilon(\nu,y)\right| d\nu + \int_0^x\int_0^y \left|\eta_\varepsilon(\nu,\tau)\right| d\tau d\nu \right\} \le$$

$$\le (M_2 + M_3) d_1^{-1} e^{-1} \left\{ \int_0^x \left|\eta_\varepsilon(\nu,y)\right| d\nu + \int_{0,0}^{x\,y}\!\!\int \left|\eta_\varepsilon(\nu,\tau)\right| d\tau d\nu \right\},$$

$$\sup_{\rho \ge 0}\left[\rho e^{-\rho}\right] \le e^{-1}, \ \rho = \frac{1}{\varepsilon + p(x,y)} exp\left(-\int_0^x \frac{G(\nu,y)d\nu}{\varepsilon + p(\nu,y)} \right).$$

В силу полученных оценок из (6) имеем

$$\left|\eta_\varepsilon(x,y)\right| \le M_0 \left\{ \int_0^x \left|\eta_\varepsilon(\nu,y)\right| d\nu + \int_0^x\int_0^y \left|\eta_\varepsilon(\nu,\tau)\right| d\tau d\nu \right\} + (H_\varepsilon u)(x,y)_{C(D)},$$

где $M_0 = (M_2 + M_3) d_1^{-1}\left(2 + e^{-1}\right)$.

Отсюда, используя Лемму 2, получим оценку

$$\left|\eta_\varepsilon(x,y)\right| \le \exp\left(xM_0(1+y)\right)(H_\varepsilon u)(x,y)_{C(D)}.$$

Следовательно, переходя к норме в $C(D)$ и используя оценку Леммы 1, при $\varepsilon \to 0$, получим, что регуляризованное решение $u_\varepsilon(x,y) \to u(x,y)$ равномерно. Теорема 1 доказана.

Следствие. При выполнении условий теоремы 1 решение уравнения (1) единственно в $C(D)$.

Предположим, что

e) $p(b,y)=0,\ p(x,y)>0,\ \forall x\in[0,b),\forall y\in[0,c],\ \ p(x,y)$ – невозрастающая по *x* функция в области D.

Лемма 2. При выполнении условий *а)-г),е)* для функций $u(x,\tau)\in C(D),$ имеет место оценка

$$\varepsilon\left(H_\varepsilon\upsilon\right)(x,y)_C\le d_2(\varepsilon p^{-1}(0)+\left(d_1\theta_2 e\right)^{-1}\varepsilon^{1-\beta}\Big)u(x,y)_{C(D_0)}+d_3\omega_\upsilon\left(\varepsilon^\beta\right),$$

где $d_2=4+2M_0\ \ d_3=1+\theta_2^{-1},\ \theta_2=1-\theta_1, 0<\theta_1<1,$

$$\omega_u\left(\varepsilon^\beta\right)=\sup_{|x-t|\le\varepsilon^\beta}\left|u(x,y)-u(t,y)\right|,\quad 1/2\le\beta<1.$$

Доказательство. В силу условий *а)-г),е)* найдутся такие положительные $C_0\, u\,\theta_1<1,$ что $\theta_1 G(x,y)+p_s^{'}(x,y)\ge 0$. Тогда учитывая свойство *а)* для функции $p(x)$: $p(x,y)\le p(t,y),\ 0\le t\le x\le b,\ y\in[0,c]$ имеем

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\varepsilon+p(x,y)}\int_0^x\exp\left(-\int_t^x\frac{G(s,y)}{\varepsilon+p(s,y)}ds\right)dt=\\&=\int_0^x\exp\left(-\int_t^x\frac{G(s,y)+p_s^{'}(s,y)}{\varepsilon+p(s,y)}ds\right)\frac{1}{\varepsilon+p(t,y)}dt\le\\&\le\int_0^x\exp\left(-\int_t^x\frac{\theta_2 G(s,y)}{\varepsilon+p(s,y)}ds\right)\frac{1}{\varepsilon+p(t,y)}dt.\end{aligned}\tag{5}$$

Используя тождество

$$\exp(-\int_t^x\frac{p_s^{'}(s,y)ds}{\varepsilon+p(s,y)})=\frac{\varepsilon+p(t,y)}{\varepsilon+p(x,y)},\forall x\in\left[0,b-\varepsilon^\beta\right],y\in[0,c],$$

для всех $x\in\left[0,b-\varepsilon^\beta\right],\dfrac{1}{2}\le\beta<1$ имеем

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon+p(x,y)}\exp(-\int_0^x\frac{G(s,y)ds}{\varepsilon+p(s,y)})\left|u(x,y)-u(0,y)\right|\le 2\frac{\varepsilon}{p(0,y)}u(x,y)_{C(D)}.$$

Пусть $0\le x\le\varepsilon^\beta,\ 1/2\le\beta<1, 0\le\tau\le T$. Тогда

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon+p(x,y)}\int_0^x\exp(-\int_t^x\frac{G(s,y)ds}{\varepsilon+p(s,y)})\frac{G(t,y)}{\varepsilon+p(t,y)}\left|u(x,y)-u(t,y)\right|dt\le\omega_u\left(\varepsilon^\beta\right).$$

Если $\varepsilon^\beta\le x\le b-\varepsilon^\beta$, то используя условия а) – в) и (5) получим

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon+p(x,y)}\int_0^x\exp(-\int_t^x\frac{G(s,y)ds}{\varepsilon+p(s,y)})\frac{G(t,y)}{\varepsilon+p(t,y)}\left|u(x,y)-u(t,y)\right|dt\le$$

$$\le \varepsilon\int_0^x \exp(-\int_t^x \frac{\theta_2 G(s,y)ds}{\varepsilon+p(s,y)})\frac{G(t,y)}{[\varepsilon+p(t,y)]^2}\left|u(x,y)-u(t,y)\right|dt \le$$

$$\le \varepsilon\int_0^{x-\varepsilon^\beta} \exp(-\int_t^x \frac{\theta_2 G(s,y)ds}{\varepsilon+p(s,y)})\frac{G(t,y)}{[\varepsilon+p(t,y)]^2}\left|u(x,y)-u(t,y)\right|dt +$$

$$+\varepsilon\int_{x-\varepsilon^\beta}^{x} G(t,y)\exp(-\int_t^x \frac{\theta_2 G(s,y)ds}{\varepsilon+p(s,y)})\frac{1}{[\varepsilon+p(t,y)]^2}\left|u(x,y)-u(t,y)\right|dt \le$$

$$\le 2u(x,y)_{C(D)}\frac{\varepsilon}{\varepsilon+p\left(x-\varepsilon^\beta,y\right)}\int_0^{x-\varepsilon^\beta}\exp(-\int_t^x \frac{\theta_2 G(s,y)ds}{\varepsilon+p(s,y)})\frac{G(t,y)}{\varepsilon+p(t,y)}dt$$

$$+\theta_2^{-1}\omega_\upsilon\left(\varepsilon^\beta\right)\le(2\frac{\varepsilon}{\varepsilon+p\left(x-\varepsilon^\beta,y\right)}\exp(-\int_{x-\varepsilon^\beta}^x \frac{\theta_2 G(s,y)ds}{\varepsilon+p(s,y)})u(x,y)_{C(D)}+$$

$$+\omega_\upsilon\left(\varepsilon^\beta\right))\theta_2^{-1}\le\frac{\varepsilon}{\varepsilon+p\left(x-\varepsilon^\beta,y\right)}\exp(-\frac{\theta_2 d_1\varepsilon^\beta}{\varepsilon+p\left(x-\varepsilon^\beta,y\right)})+\omega_\upsilon\left(\varepsilon^\beta\right))\times$$

$$\times\theta_2^{-1}(2u(x,y)_{C(\mathrm{D})}\le 2u(x,y)_{C(D)}(d_1\theta_2^2 e)^{-1}\varepsilon^{1-\beta}+\theta_2^{-1}\omega_\upsilon\left(\varepsilon^\beta\right).$$

Если $b-\varepsilon^\beta\le x\le b,\ 1/2\le\beta<1,\ 0\le y\le c$, то в силу условия *а) –в)* и свойства функции $p(x)$ получим

$$|\varepsilon\frac{u(x,y)-u(0,y)}{\varepsilon+p(x,y)}\exp(-\int_0^x \frac{G(s,y)}{\varepsilon+p(s,y)}ds)|\le u(x,y)_{C(\mathrm{D})}\frac{2\varepsilon}{\varepsilon+p(x,y)}$$

$$\exp(-\int_0^{b-\varepsilon^\beta}\frac{G(s,y)}{\varepsilon+p(s,y)}ds)\le 2\frac{\varepsilon+p\left(b-\varepsilon^\beta,y\right)}{p(0,y)}u(x,y)_{C(D)}\times$$

$$\le\exp(-\int_0^{b-\varepsilon^\beta}\frac{G(s,y)+p_s(s,y)}{\varepsilon+p(s,y)}ds)u(x,y)_{C(D)}\le 2\frac{1+M_1}{p(0,y)}\varepsilon u(x,y)_{C(D)},$$

где $M_1=p(x,y)_{C(D)}$;

$$\frac{\varepsilon}{\varepsilon+p(x,y)}\int_0^x \exp(-\int_t^x \frac{G(s,y)ds}{\varepsilon+p(s,y)})\frac{G(t,y)}{\varepsilon+p(t,y)}\left|u(x,y)-u(t,y)\right|dt=$$

$$=\int_0^{x-\varepsilon^\beta}\exp(-\int_t^x \frac{G(s,y)ds}{\varepsilon+p(s,y)})\frac{G(t,y)}{\varepsilon+p(t,y)}\left|u(x,y)-u(t,y)\right|dt+$$

$$+\int_{x-\varepsilon^\beta}^x exp(-\int_t^x \frac{G(s,y)ds}{\varepsilon+p(s,y)})\frac{G(t,y)}{\varepsilon+p(t,y)}\left|u(x,y)-u(t,y)\right|dt\}\times$$

$$\times\frac{\varepsilon}{\varepsilon+p(x,y)} \le \frac{\varepsilon\left(\varepsilon+p\left(x-\varepsilon^{\beta},y\right)\right)}{\varepsilon+p(x,y)} 2\|u(x,y)\|_{C(D)} \times$$

$$\times\int_0^{x-\varepsilon^{\beta}} \exp\left(-\int_t^x \frac{\theta_1 G(s,y)+p_s(s,y)}{\varepsilon+p(s,y)}ds\right)\exp\left(-\theta_2\int_t^x \frac{G(s,y)ds}{\varepsilon+p(s,y)}\right)\times$$

$$\frac{G(t,y)}{[\varepsilon+p(t,y)]^2}dt+\omega_{\upsilon}\left(\varepsilon^{\beta}\right) \le \theta_2^{-1}\frac{\varepsilon+p\left(b-\varepsilon^{\beta},y\right)}{\varepsilon+p\left(x-\varepsilon^{\beta},y\right)}\exp\left(-\theta_2\int_{x-\varepsilon^{\beta}}^{x}\frac{G(s,y)ds}{\varepsilon+p(s,y)}\right)$$

$$\times 2\|u(x,y)\|_{C(D)}+\omega_{\upsilon}\left(\varepsilon^{\beta}\right) \le 2\|u(x,y)\|_{C(D)}\theta_2^{-1}\frac{\varepsilon+M_1\varepsilon^{2\beta}}{\varepsilon+p\left(x-\varepsilon^{\beta},y\right)}\times$$

$$\exp\left(-\theta_2\frac{d_1\varepsilon^{\beta}}{\varepsilon+p\left(x-\varepsilon^{\beta},y\right)}\right)+\omega_{\upsilon}\left(\varepsilon^{\beta}\right) \le 2\|u(x,y)\|_{C(\mathrm{D})}(\theta_2^2 d_1 e)^{-1}\left(1+M_0\right)\times\varepsilon^{1-\beta}+\omega_{\upsilon}\left(\varepsilon^{\beta}\right).$$

Теорема 2. Пусть выполняются условия *а) – г), ж – е)* и уравнение (1) имеет решение $u(x,\tau)\in C(D)$. Тогда решение уравнения (3) равномерно сходится к решению уравнения (1) при $\varepsilon\to 0$ и имеет место оценка

$$\|u_{\varepsilon}(x,y)-u(x,y)\|_{C(D)} \le C_2\left(d_2\left(p^{-1}(0,y)\varepsilon+\left(d_1\theta_2 e\right)^{-1}\varepsilon^{1-\beta}\right)\|u(x,y)\|_{C(D_0)}+d_3\omega_u\left(\varepsilon^{\beta}\right)\right),$$

где $d_2,\ d_3,\ \omega_u\left(\varepsilon^{\beta}\right)$ определяются так же, как в лемме 1, $0<C_2=const.$

Следствие 2. При выполнении условий теоремы 2 решение уравнения (1) единственно в $C(D)$.

Литература

1. *Асанов А.* Регуляризация и единственность решений линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода / А. Асанов, Г. Ободоева // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1994. – Вып. 25. – С. 65–74.
2. *Бухгейм А.Л.* Уравнение Вольтерра и обратные задачи / А.Л. Бухгейм. – Новосибирск: Наука, 1983. – 207 с.
3. *Булатов М.В.* Регуляризация вырожденных систем интегральных уравнений Вольтерра / М.В. Булатов // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2002. – Т. 42. – № 3. – С. 330–335.
4. *Глушак А.В.* Численное решение линейной обратной задачи для уравнения Эйлера – Дарбу / А.В. Глушак, Т.Т. Каракеев // ЖВМиМФ. – 2006. – Т. 46. – № 5. – С. 848–857.
5. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
6. *Каракеев Т.Т.* Регуляризация нелокальной граничной задачи для псевдопараболических уравнений / Т.Т. Каракеев // Исслед. по интегро-дифференц. уравнениям. – Бишкек: Илим, 2003. – Вып. 32. – С. 179–183.
7. *Омуров Т.Д.* Регуляризация и численные методы решения обратных и нелокальных краевых задач / Т.Д. Омуров, Т.Т. Каракеев. – Бишкек: Илим, 2006. – 164 с.

8. *Тихонов А.Н.* Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1986. – 287 с.
9. *Филатов А.Н.* Интегральные неравенства и теория нелинейных колебаний / А.Н. Филатов, Л.В. Шарова. – М.: Наука, 1976. – 67 с.
10. *Янно Я.* Регуляризация одного уравнения Вольтерра I рода, равносильного уравнению III рода / Я. Янно // Учен. зап. Тартуск. гос. ун-та, 1987. – Вып. 762. – С. 16–30.
11. *Karakeev T.T.* Regularization of Systems of Volterra Linear Integral Equations of the Third Kind / T.T. Karakeev // Lobachevskii J. of Mathematics. – 2020. – № 41 (9). С. 1816–1821.

М.Б. Муратбеков, А.О. Сулеймбекова
(Казахстан)

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ЛИНЕЙНОГО ОПЕРАТОРА ТИПА КОРТЕВЕГА – ДЕ ФРИЗА

Аннотация. В этой работе изучаются спектральные свойства линейного оператора типа Кортевега – де Фриза.

Ключевые слова: спектртальные свойства; линейный оператор; дифференциальные уравнения; сингулярная точка.

В работе рассматривается дифференциальный оператор

$$Lu + \mu u = \frac{\partial u}{\partial y} + R_2(y)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + R_1(y)\frac{\partial u}{\partial x} + R_0(y)u + \mu u,$$

первоначально определенный на $C^\infty_{0,\pi}\left(\overline{\Omega}\right)$, где $\overline{\Omega} = \left\{(x, y): -\pi \le x \le \pi,\ -\infty < y < \infty\right\}$, $\mu \ge 0$.

$C^\infty_{0,\pi}$ – множество, состоящее из бесконечно дифференцируемых финитных функций по переменной *y* и удовлетворяющих условиям

$$u_x^{(i)}(-\pi, y) = u_x^{(i)}(\pi, y) \qquad i = 0, 1, 2.$$

В дальнейшем предположим, что коэффициенты $R_0(y)$, $R_1(y)$, $R_2(y)$ удовлетворяют условиям

i) $R_0(y) \ge \delta_0 > 0,\ R_1(y) \ge \delta_1 > 0,\ -R_2(y) \ge \delta_2 > 0$ и непрерывные функции в $R = (-\infty, \infty)$;

ii) $\mu_0 = \sup\limits_{|y-t|\le 1} \dfrac{R_0(y)}{R_0(t)} < \infty; \quad \mu_1 = \sup\limits_{|y-t|\le 1} \dfrac{R_1(y)}{R_1(t)} < \infty; \quad \mu_2 = \sup\limits_{|y-t|\le 1} \dfrac{R_2(y)}{R_2(t)} < \infty.$

Оператор $L + \mu I$ допускает замыкание в пространстве $L_2(\Omega)$, которое обозначим также через $L + \mu I$.

Указанный оператор порождает так называемую периодическую задачу без начальных условий. Как известно, если граничный режим действует достаточно долго, то благодаря трению, присущему всякой реальной физической системе, влияние начальных данных с течением времени ослабевает. Таким образом, мы приходим к задаче без начальных условий.

Теорема 1. Пусть выполнено условие i). Тогда оператор $L+\mu I$ при $\mu \geq 0$ непрерывно обратим в пространстве $L_2(\Omega)$, причем справедливо равенство

$$u(x, y)=(L+\mu I)^{-1} f=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(l_n+\mu I\right)^{-1} f_n(y) e^{inx}, \tag{1}$$

где $f(x,y) \in L_2(\Omega)$, $f(x,y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(y) \cdot e^{inx}$, $f_n(y)=<f(x,y), e^{inx}>$, $i^2=-1$, $<\cdot,\cdot>$ скалярное произведение

$\left(l_n+\mu I\right) z=z'(y)+\left(-in^3 R_2(y)+inR_1(y)+R_0(y)+\mu\right) z, \quad z \in D\left(l_n\right)$.

Определение 1. Будем говорить оператор L разделим в пространстве $L_2(\Omega)$, если для функций $u \in D(L)$ имеет место оценка

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial y}\right\|_2+\left\|R_2(y) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right\|_2+\left\|R_1(y) \frac{\partial u}{\partial x}\right\|_2+\left\|R_0(y) u\right\|_2 \leq C\left(\|Lu\|_2+\|u\|_2\right),$$

где С – не зависит от $u(x,y)$, $\|\cdot\|_2$ – норма в $L_2(\Omega)$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия i) – ii). Тогда оператор L разделим.

Пример 1. Пусть $R_0(y)=|y|+1$, $R_1(y)=e^{|y|}$, $R_2(y)=-10 \cdot e^{|y|}$, $-\infty<y<\infty$. Нетрудно убедиться, что выполняются все условия теоремы 2. Следовательно оператор L разделим, т. е.

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial y}\right\|_2+\left\|-10 \cdot e^{|y|} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right\|_2+\left\|e^{|y|} \frac{\partial u}{\partial x}\right\|_2+\left\|(|y|+1) u\right\|_2 \leq C\left(\|Lu\|_2+\|u\|_2\right),$$

где С – постоянное число.

Теорема 3. Пусть выполнено условия i) – ii). Тогда резольвента оператора L компактна тогда и только тогда, когда

$\lim\limits_{|y| \to \infty} R_0(y)=\infty$.

Определение 2. Пусть A – линейный вполне непрерывный оператор и пусть $|A|=\sqrt{A^* A}$. Собственные числа оператора $|A|$ называются s-числами оператора A.

Ненулевые s-числа оператора $(L+\mu I)^{-1}$ будем нумеровать в порядке их убывания с учетом их кратности так, что

$S_k\left((L+\mu I)^{-1}\right)=\lambda_k\left(\left|(L+\mu I)^{-1}\right|\right), \; k=1,2, \ldots$.

Введем следующую функцию $N(\lambda)=\sum\limits_{S_k>\lambda} 1$ – количество S_k больших $\lambda>0$.

Теорема 4. Пусть выполнены условия i) – ii). Тогда справедлива оценка

$$c^{-1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda^{-1} mes\left(y \in R: Q_n(y) \leq c^{-1} \lambda^{-1}\right) \leq N(\lambda) \leq c \sum_{n=-\infty}^{\infty} \lambda^{-1} mes\left(y \in R: Q_n(y) \leq c^{-1} \lambda^{-1}\right),$$

где $Q_n(y)=\left|-in^3 R_2(y)+inR_1(y)+R_0(y)\right|$ постоянное число $c>0$ не зависит от $Q_n(y)$ и λ.

Пример 2. В этом примере покажем как теорема 4 позволяет получить оценки собственных чисел оператора $\left(L+\mu I\right)^{-1}$.

Рассмотрим оператор:

$$\left(L+\mu I\right)u=\frac{\partial u}{\partial y}+\left(-|y|+1\right)\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\left(|y|+1\right)\frac{\partial u}{\partial x}+\left(|y|+1\right)u+\mu u$$

$u\in D\left(L\right)$, $\mu\geq 0$.

Из равенства (1) следует, что если s – сингулярная точка оператора $\left(L+\mu I\right)^{-1}$, то s является сингулярным числом одного из операторов $\left(l_n+\mu\right)^{-1}$ $\left(n=0,\pm 1,\pm 2,...\right)$, и наоборот. Следовательно, учитывая это, далее при $\mu\geq 0$ через $S_{k,n}\left(k=1,2,...\right)$ обозначим сингулярные числа оператора $\left(l_n+\mu I\right)^{-1}$ $\left(n=0,\pm 1,\pm 2,...\right)$. Согласно теореме 4 имеем

$$\frac{c^{-1}}{\left(|n|+1\right)^{3/2}k^{1/2}}\leq S_{k,n}\leq\frac{c}{\left(|n|+1\right)^{3/2}k^{1/2}},\ k=1,2,...,\quad n=0,\pm 1,\pm 2,... \tag{2}$$

Теперь предположим, что оператор $\left(l_n+\mu I\right)^{-1}$ имеет бесконечное число собственных значений, тогда из оценки (2) и неравенства Вейля получаем, что

$$\left|\lambda_{k,n}\right|^k\leq\prod_{j=1}^{k}\left|\lambda_{j,n}\right|\leq\prod_{j=1}^{k}S_{j,n}\leq c^k\left(k!\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\left(|n|+1\right)^{\frac{3}{2}k}}.$$

Далее, используя неравенство $e^k\cdot k!\geq k^k$ $\left(k=1,2,...\right)$, получаем оценку собственных чисел:

$$\left|\lambda_{k,n}\right|\leq\cdot\frac{c\cdot e^{\frac{1}{2}}\cdot k^{-\frac{1}{2}}}{\left(|n|+1\right)^{\frac{3}{2}}},\quad k=1,2,... .$$

Литература

1. *Muratbekov M.B., Suleimbekova A.O.* On the existence of the resolvent and separability of a class of the Korteweg – de Vriese type linear singular operators // Bulletin of the Karaganda University. − 2021. – Vol. 101. – № 1. – P. 87–97.
2. *Muratbekov M.B., Muratbekov M.M., Suleimbekova A.O.* Bounded invertibility and separability of a parabolic type singular operator in space $L_2(R^2)$ // Turk. J. Math. − 2021. − № 45. – P. 2199–2210.

Н.Ж. Наурызбаев, А.А. Шоманова, Н. Темиргалиев
(Казахстан)

ОПТИМАЛЬНЫЕ ФОРМУЛЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ С «ПЛОХИМИ» ДИСКРЕПАНСАМИ УЗЛОВ

Аннотация. В работе изучается вопрос существования близких к оптимальному вычислительных агрегатов с «плохим» L^2-дискрепансом сетки узлов и насколько явные квадратурные формулы предпочтительны перед алгоритмами перебора.

Ключевые слова: L^2-дискрепанс; сетка Смоляка; явная квадратурная формула; алгоритмы перебора в задачах численного интегрирования.

Близкая к оптимальной квадратурная формула с «плохим» дискрепансом узлов

Дискрепанс представляет собой теоретико-числовое понятие, которое, с одной стороны, показывает степень равномерности распределения конечного набора точек (сетки) в единичном кубе и, с другой стороны, через него выражаются погрешности метода квази-Монте Карло приближенного вычисления интегралов по многомерному единичному кубу.

Как известно, чем с большей скоростью убывает дискрепанс сетки, тем быстрее квадратурная формула с узлами по этой сетке и с равными весами стремится к значению интеграла. Однако, как оказалось, быстрое убывание дискрепанса сетки не обязательно для эффективности квадратурной формулы с узлами, составляющими эту сетку. Именно в [1] показано, что сетка узлов может быть с очень плохим дискрепансом (порядка $(\ln N)^{-1}$ вместо возможных $\succ\!\prec (\ln N)^{\beta} \,/\, N(\beta > 0)\big)$, в то время как квадратурную формулу с этими плохими узлами специальным подбором весов можно сделать близкой к оптимальной [2, 3].

В [1] речь шла о дискрепансе сетки Смоляка в равномерной метрике, в следующей теореме в двумерном случае находятся точные порядки дискрепанса этой сетки в L^2-норме.

Теорема 1. Для сетки Смоляка $\left(q \ge s-1, N = N\left(q\right) = 2^q q^{s-1}\right)$

$$U_{n=0}^{q} U_{\nu_1+\dots+\nu_s=n} \left\{ \left(\frac{2l_1-1}{2^{\nu_1}}, \dots, \frac{2l_s-1}{2^{\nu_s}} \right) : 1 \le l_j \le 2^{\nu_j - 1}, j = 1, \dots, s \right\} \equiv \left\{ \xi_k \right\}_{k=1}^{N} \tag{1}$$

из $[0,1]^s$ имеет место двусторонняя оценка L^2-дискрепанса

$$D_2\left(\left\{\xi_k\right\}_{k=1}^{N}\right)_{L^2} \equiv \left(\int_{[0,1]^s} \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \chi_{[0,x_1)\times\dots\times[0,x_s)}\left(\xi_k\right) \right.\right.$$

$$\left.\left. - \int_{[0,1]^s} \chi_{[0,x_1)\times\dots\times[0,x_S)}\left(t\right) dt \right)^2 dxdy \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\log^{s-1} N}.$$

Тем самым, здесь также сохраняется эффект с «очень плохим» дискрепансом: в условиях (2) для квадратурной формулы Смоляка с сеткой узлов (1) для класса Коробова $E_S^r(r > 1)$ выполнено [2, 3].

$$\sup_{f\in E_S^r}\left|\int_{[0,1]^s} f(x)\right.$$

$$\left.-\sum_{l=0}^{s-1}(-1)^l \sum_{\substack{(\nu_1,\dots,\nu_s)\in Z^s\\ \nu_j\ge\nu_j^{(0)}(j=1,\dots,s),\nu_1+\dots+\nu_s=q-l}} \frac{1}{2^{q-l}}\sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1-1}}\cdots\sum_{k_s=0}^{2\nu_s-1} f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},\dots,\frac{k_2}{2^{\nu_2}}\right)\right| \underset{r,\nu_0}{\rightleftharpoons} \frac{(\ln N)^{(r+1)(s-1)}}{N^r}.$$

Точный порядок восстановления функций из классов Коробова
по ее значениям в узлах сетки Смоляка

В задаче восстановления функций по их значениям в точках сетка Смоляка, несмотря на ее «плохой» дискрепанс, также приводит к оптимальным или близким к оптимальным результатам. В продолжение [2] в [4] посредством привлечения тензорных произведений функционалов была получена общая формула переноса результатов меньшего числа переменных на большие как новое развитие «Алгоритма Смоляка». На основе выделенной из нее специальной формулы в [5] получены оценки сверху восстановления функций вычислительными агрегатами, построенными по значениям в узлах сетки Смоляка.

Оценка сверху в теореме 2 из статьи [5] является неулучшаемой.

Теорема 2. При всех s $(s = 2,3,\dots)$ *и* $q\,(q = 1,2,\dots)$

$$\sup_{f\in E_S^r} f(x) - \Lambda_q(x;f)_{C([0,1]^s)} = \frac{(lnN)^{(s-1)r}}{N^{r-1}}$$

где оператор восстановления $\Lambda_q(x,f)$ имеет вид

$$\left(q > \nu_0^{(1)} + \dots + \nu_0^{(s)}, N = N(q) \succ\prec 2^q\cdot q^{s-1}\right):$$

$$\Lambda_q(x,f) \equiv \sum_{(\nu_1\dots,\nu_s)\in\Omega_q\in Z_{\nu_0}^s} \frac{1}{2^{\nu_1+\dots+\nu_s}}\sum_{k_1=0}^{2^{\nu_1-1}}\cdots\sum_{k_s=0}^{2^{\nu_s-1}}\left\{\prod_{j=1}^{s}\sum_{n_j=2^{\nu_j-1}}^{2^{\nu_j-1}}\left[\lambda_{n_j}^{(\nu_j)}(j)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\operatorname{sgn}\left(\nu_j-\nu_j^{(0)}\right)\left(1+(-1)^{k_j}\right)\lambda_{n_j}^{(\nu_j-1)}(j)\right]\cdot e^{2\pi n_j\left(x_j-\frac{k_j}{2^{\nu_j}}\right)}\right\} f\left(\frac{k_1}{2^{\nu_1}},\dots,\frac{k_s}{2^{\nu_s}}\right),$$

$$\lambda_\tau^{(\nu)}(\cdot) = \begin{cases}1 \text{ если } |\tau|\le 2^{\nu-1},\\ 2 \text{ если } |\tau| > 2^{\nu-1},\end{cases}\quad \Omega_q = \left\{(\nu_1,\dots,\nu_s)\in Z_{\nu_0}^s : \nu_1+\dots+\nu_s\le q\right\}.$$

Сравнительная эффективность явных квадратурных формул
и алгоритмов перебора

В научных вычислениях есть два состояния – явно выписываемая формула и алгоритм компьютерного перебора, который надо сделать технически выполнимым. Внутри явных формул есть свои вычислительные различия – пригодность для вычислений и со сложностями при применениях.

В развитой теории численного интегрирования (см. [6–10] и имеющуюся в них библиографию) при количестве переменных $s \ge 3$ до сих пор не построены явные квадратурные формулы с равными весами, известен только перебор, где в [11–15] найдены близкие к оптимальным алгоритмы, приводящие к сеткам Коробова, являющих собой «сверхсжатие информации».

Только в случае $s=2$ известна явная квадратурная формула, построенная Н.С. Бахваловым [7] и независимо, Хуа Ло-Кеном и Вань Юанем [8, с. 92], в западной научной литературе называемая квадратурной формулой Фибоначчи (так как ее узлы выражаются через последовательность Фибоначчи $b_1 = b_2 = 1, b_n = b_{n-1} + b_{n-2}\,(n \geq 3)$)

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{b_n} f\left(\frac{1}{b_n}k, \left\{\frac{b_{n-1}}{b_n}k\right\}\right), \tag{3}$$

где $\{x\}$ – дробная часть числа x.

Несмотря на явный вид записи квадратурной формулы (3), число ее узлов b_n растет со скоростью геометрической прогрессии с основанием $1.68 \approx \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, и потому сложность применения такой квадратурной формулы быстро возрастает с увеличением n. Так, например, если для достижения точности расчета не хватает $b_{32} = 2178309$ узлов, то доступные по (3) следующие количества узлов будут 3524 578, 5702887 и т. д.

В теории численного интегрирования в двумерном случае поиск явной квадратурной формулы был начат в 1-м издании 1963 года монографии Н.М. Коробова и завершен во 2-м издании 2004 года, оценками сверху

$$\sup_{f \in E_2^r}\left|\int_{[0,1]^2} f(x,y)\,dxdy - \frac{1}{A}\sum_{k=1}^{A} f\left(\frac{1}{A}k, \left\{\frac{b}{A}k\right\}\right)\right| \ll A^{-r}\sum_{t=1}^{A-1}\left(t \cdot \left\|\frac{bt}{A}\right\|\right)^{-r}$$

$$\ll A^{-r}(M+1)^r(1+\ln A), \tag{4}$$

где $r>1$, А и $b(1<b<A)$ – взаимно простые целые числа (в обозначении $(A,b)=1$), а $\| x \|$ есть расстояние от x до ближайшего целого числа.

Заключительная оценка (4) получена при условии «неполные частные дроби b/A ограничены величиной M», для нахождения которых Н.М. Коробовым написана специальная статья [16].

Квадратурная формула Фибоначчи (3) получается из общего результата Коробова (4) при $M=1$. Дальнейшее построение квадратурной формулы в (4) с облегчением нахождения A и b при увеличении M но с уменьшением точности вычислений на экспоненциально растущий вместе с r множитель $(M+1)^r$. Этим вызвана Гипотеза Зарембы (1971 г.): существует положительное M (быть может, $\mathrm{M}=5$), что для всякого целого положительного A найдется целое $\mathrm{p}, 1<\mathrm{p}<\mathrm{A}, (\mathrm{p},\mathrm{A})=1$, для которого все неполные частные p/A ограничены числом M.

Это гипотеза до сих пор ни подтверждена, ни опровергнута. Однако даже если была бы и доказана теоретически, практическая польза от нее небольшая. Всяческие ослабленные ее формы вызвали большой поток теоретико-числовых исследований (см., напр., [17]).

Справедлива.

Теорема 3. Пусть даны действительное $r>1$ и целье положительнье числа $A, p(p<A)$ и b. Для квадратурной формулы

$$\Lambda_N\left(f\right) = \frac{1}{Ab}\sum_{k=1}^{A}\sum_{l=1}^{b} f\left(\frac{k}{A}, \left\{\frac{l}{b} - \frac{pk}{Ab}\right\}\right)$$

с равными весами и $N = Ab$ узлами имеет место соотношение

$$\Delta_N\left(E_s^r\right) = \sup_{f\in E_2^r}\left|\int_{[0,1]^2} f\left(x\right)dx - \Lambda_N\left(f\right) \succ\prec \frac{1}{\left(bp\right)^r} + \frac{1}{A^r}\sum_{t=1}^{A-1}\left(t\cdot\frac{p}{A}t\right)^{-k}\right. .$$

В вопросе «Насколько эффективны в численном интегрировании явные квадратурные формулы перед алгоритмами перебора?», вычислительные эксперименты показали, что если и есть преимущества, то они не относятся к решающим.

Литература

1. *Nauryzbayev N., Temirgaliyev N.* An Exact Order of Discrepancy of the Smolyak Grid and Some General Conclusions in the Theory of Numerical Integration // Found Comput Math. 12, 139–172 (2012).
2. *Смоляк С.А.* Квадратурные 4 интерполяционные формулы на тензорных произведениях некоторыхх классов функций / С.А. Смоляк, Докл. АН СССР 148 (5), 1042–1045 (1963).
3. *Темиргалиев Н.* Классы Us (β, θ, α; ψ) и квадратурные формулы / Н. Темиргалиев // Докл. РАН 393 (№ 5) 605–608 (2003).
4. *Темиргалиев Н.* Тензорные произведения функиионалов и их применение / Н. Темиргалиев // Докл.РАН 430 (4), 460–465 (2010).
5. *Темиргалиев Н.* Аппроксимативные возможности вычислительных агрегатов «типа Смоляка» с ядрами Дирихле, Фейера и Валле – Пуссена в шкале классов / Н. Темиргалиев, Н.Ж. Наурызбаев, А.А. Шоманова–Ульянова // Изв. вузов. Математика. – 2015. – № 7. – С. 75, 81.
6. *Коробов Н.М.* Теоретико-числовые методы в приближенном анализе / Н.М. Коробов. – М.: Физматгиз, 1963. – 224 с.; 2-е изд., перераб. и доп. – М.: МЦНМО, 2004. – 288 с.).
7. *Бахвалов Н.С.* О приближенном вычислении кратных интегралов / Н.С. Бахвалов // Вестник МГУ. Сер. матем., мех. 1959. 4, 3–18.
8. *Hua L.-K., Wang Y.* Applications of Number Theory to Numerical Analysis (Berlin Heidelberg-New York Springer-Verlag. – 1981. – 241 p.)
9. *Hlawka E.* Näherungsformeln zur Berechnung von mefifachen Integralen mit Anwendunden auf die Berechungen von Potentialen, Induktions Koeffizienter und Lösungen von Gleichungs systemen: [Pap.] Semin. Number-Theor. Analysis., Vienna,1988–1989, Lect. Notes Math. 1452, 65–111 (1990).
10. *Кейперс Л.* Равномерное распределение последовательностей / Л. Кейперс, Г. Нидеррейтер. – М.: Наука, 1985.
11. *Воронин С.М.* О квадратурных формулах, связанных с дивизорами поля гауссовыхх чисел / С.М. Воронин, Н. Темиргалиев // Матем. заметки. – 1989. – № 46 (2). –С. 34–41.
12. *Темиргалиев Н.* Применение теории дивизоров к численному интегрированию периодических функций многих переменных / Н. Темиргалиев // Матем. сб. – 1990. № 181 (4). – С. 490–505.
13. *Темиргалиев Н.* Об общем алгоритме численного интегрирования периодических функций многих переменных / Н. Темиргалиев, Е.А. Баилов, А.Ж. Жубанышева // Об Докл. РАН. – 2007. – № 416 (2). –С. 169–173.

14. *Жубанышева А.Ж.* Применение теории дивизоров построению таблиц оптимальных коэффициентов квадратурных формул / А.Ж. Жубанышева, Н. Темиргалиев, Ж.Н. Темиргалиева // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2009. – № 49 (1). – С. 14–25.
15. *Баилов Е.А.* Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных / Е.А. Баилов, М.Б. Сихов, Н. Темиргалиева // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2014. – № 54 (7). – 1059–1077.
16. *Коробов Н.М.* О конечных и цепных дробях / Н.М. Коробов // УМН. – 1997. – № 52 (6(318)). – 167–168.
17. *Кан И.Д., Фроленков Д.А.* Усиление теоремы Бургейна – Конторовича / И.Д. Кан, Д.А. Фроленков // Изв. РАН. Сер. матем. – 2014. – № 78 (2). С. 87–144.

А.С. Омуралиев, Э.Д. Абылаева
(Кыргызстан)

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Аннотация. Асимптотическое исследование сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений гиперболического типа привлекало сравнительно мало внимания исследователей. В работе построено асимптотическое решение сингулярно возмущенной смешанной задачи для гиперболической системы. Кроме того, для асимптотического решения гиперболической системы впервые применен метод регуляризации сингулярно возмущенных задач С.А. Ломова. Показано, что такой подход значительно упрощает построение асимптотики решения сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений гиперболического типа.

Ключевые слова: сингулярно возмущенная гиперболическая система; регуляризованная асимптотика; смешанная задача.

Введение. Работы [1–6] посвящены системам гиперболических уравнений. В [1] изучалась система двух уравнений с постоянными коэффициентами, одно из собственных значений которой равно нулю и имеет внутренний переходный слой в окрестности разрыва решения вырождающегося уравнения. Особенностью изучаемой в [2, 3] системы является то, что малый параметр $\varepsilon > 0$ в первом уравнении содержится при производной по t, а во втором уравнении при производной по x. Это приводит к интересным особенностям решения и его асимптотики при $\varepsilon \to 0$. В [3] изучается та же задача с нелинейным членом. Работы [4–6] посвящены изучению скалярных и многомерных систем гиперболических уравнений в критическом случае. В [4] построена формальная асимптотика решения начально-краевой задачи для сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с малой нелинейностью. Работа [5] посвящена построению асимптотики решения задачи Коши для сингулярно возмущенной гиперболической системы линейных уравнений в критическом случае. В [6] построено полное асимптотическое разложение решения исходной задачи для сингулярно возмущенной гиперболической системы уравнений.

В данной статье для решения сингулярно возмущенной смешанной задачи для гиперболической системы применим метод регуляризации для сингулярно возмущенных задач С.А. Ломова, который ранее для таких задач не применялся.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу:

$$L_\varepsilon u \equiv \varepsilon\left(\partial_t u + A(x,t)\partial_x u\right) - B(x,t)u = f(x,t),(x,t) \in \Omega$$
$$u\big|_{t=0} = 0,\ u\big|_{x=0} = 0, \tag{1}$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр, $\Omega = (0 < x \le T) \times (0 < t \le T)$.

Задача решается при следующих предположениях:

1. $A(x,t), B(x,t) \in C^\infty\left(\overline{\Omega}, \mathbb{C}^{n\times n}\right), f(x,t) \in C^\infty\left(\overline{\Omega}, \mathbb{C}^n\right), u = \mathrm{col}\left(u_1\ ,\ u_2, \ldots, u_n\right)$.

2 . Собственные значения общей задачи на собственные значения:

$$B(x,t)\psi_i(x,t) = \lambda_i(x,t)A(x,t)\psi_i(x,t),\ i = \overline{1,n}$$

удовлетворяет условиям:

$$\lambda_i(x,t) \ne \lambda_j(x,t), \forall i \ne j, \lambda_i(x,t) < 0, \forall (x,t) \in \overline{\Omega}.$$

В данной статье будет построена регуляризованная асимптотика решения задачи (2) методом [7].

Регуляризация задачи. Введем регуляризующие переменные [7] формулами:

$$\zeta_j = \frac{\varphi_j(x,t)}{\varepsilon}, \eta_j = \frac{y_j(x,t)}{\varepsilon}, \varphi_j(x,0) = 0, U_j(0,t) = 0, j = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Следуя [7] вместо искомой функции $u(x,t,\varepsilon)$ введем расширенную функцию $\tilde{u}(M,\varepsilon), M = (x,t,\zeta,\eta)$, такую, что:

$$\tilde{u}(M,\varepsilon)\big|_{\theta=\chi(x,t,\varepsilon)} \equiv u(x,t,\varepsilon), \chi = \left(\frac{\varphi(x,t)}{\varepsilon}, \frac{y(x,t)}{\varepsilon}\right). \tag{3}$$

Найдем на сновании (2), производные $\partial_x u$ и $\partial_t u$, тогда вместо задачи поставим расширенную функцию:

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\partial_t\varphi_j + \partial_x\varphi_j A(x,t)\right]\partial_{\zeta_j}\tilde{u} + \sum_{j=1}^{n}\left[\partial_t y_j + \partial_x y_j A(x,t)\right]\partial_{\zeta_j}\tilde{u} - B(x,t)\tilde{u}$$
$$= f(x,t) - \varepsilon\partial_t\tilde{u} - \varepsilon A(x,t)\partial_x\tilde{u} \tag{4}$$
$$\tilde{u}\big|_{t=\zeta=0} = 0, \tilde{u}\big|_{x=\eta=0} = 0.$$

По аналогии [8, с. 307] введем невырожденную матрицу $X(x,t)$, которая одновременно приводит матрицы $A(x,t), B(x,t)$ к диагональным видам

$$X^T BX = \mathrm{diag}\left(\lambda_j\right) \equiv \Lambda(\lambda), X^T AX = I, \tag{5}$$

где I – единичная матрица.

В задаче (4) произведем замену:

$$\tilde{u}(M,\varepsilon) = X(x,t)\tilde{\omega}(M,\varepsilon).$$

и умножим слева на $X^T(x,t)$. На основании (5) задача (4) перепишется:

$$\sum_{j=1}^{n}\left[\partial_t\varphi_j+\partial_x\varphi_j\right]\partial_{\zeta_j}\tilde{\omega}+\sum_{j=1}^{n}\left[\partial_t y_j+\partial_x y_j\right]\partial_{\zeta_j}\tilde{\omega}-\text{Л}(\lambda)\tilde{\omega}$$
$$=X^T(x,t)f(x,t)-\varepsilon\left[D(x,t)\tilde{\omega}(M,\varepsilon)+\partial_t\tilde{\omega}+\partial_x\tilde{\omega}\right], \tag{6}$$
$$\tilde{\omega}\big|_{t=\zeta=0}=\tilde{\omega}\big|_{x=\eta=0}=0$$

здесь предварительно приведена матрица $X^T X$ к единичной,

$$D(x,t)=X^T\left(\partial_t X+A(x,t)\partial_x X\right).$$

Разрешимость и единственность итерационных задач. Задача регулярна по ε при $\varepsilon\to 0$, поэтому ищем решение задачи в виде ряда:

$$\tilde{\omega}(M,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\omega_k(M). \tag{7}$$

Для коэффициентов этого ряда получим итерационные задачи:

$$L_0\omega_0=X^T(x,t)f(x,t),$$
$$L_0\omega_k=-D(x,t)\omega_{k-1}-\partial_t\omega_{k-1}-\partial_x\omega_{k-1},k\ge 1, \tag{8}$$
$$\omega_k(M)\big|_{t=\zeta=0}=\omega_k(M)\big|_{x=\eta=0}=0,$$

где

$$L_0\equiv\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\partial_t\varphi_j+\partial_x\varphi_j\right)\partial_{\zeta j}+\left(\partial_t y_j+\partial_x y_j\right)\partial_{\eta j}\right]-\text{Л}(\lambda)$$

Регулирующие функции $\varphi_j(x,t), y_j(x,t)$ выберем как решение задач:

$$\partial_t\varphi_j+\partial_x\varphi_j=\lambda_j(x,t),\ \varphi_j(x,0)=0,$$
$$\partial_t y_j+\partial_x y_j=\lambda_j(x,t),\ y_j(0,t)=0, j=\overline{1,n} \tag{9}$$

т. е.

$$\varphi_j(x,t)\ =\int_0^t\lambda_j(s-z,s)ds,\quad z=t-x$$
$$y_j(x,t)\ =\int_0^x\lambda_j(s,z+s)ds,\quad j=\overline{1,n}.$$

На основании (9) оператор L_0 запишется:

$$L_0\equiv\sum_{j=1}^{n}\lambda_j(x,t)\left[\partial_{\zeta j}+\partial_{\eta j}\right]-\Lambda(\lambda).$$

Введем пространство функций в котором будут решаться итерационные задачи (8).

$$W = \{\omega(M) : \omega(M)$$
$$= v(x,t) + c^1(x,t)\exp(\zeta)$$
$$+c^2(x,t)\exp(\eta) + \phi(\eta-\zeta)c^3(x,t)\exp(\zeta)$$
$$+\phi(\zeta-\eta)c^4(x,t)\exp(\eta),$$
$$c^l(x,t) \in C^\infty\left(\overline{\Omega}, \mathbb{C}^{nxn}\right), l = 1,2,3,4.\}$$
$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^x, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1)–2) и $H(M) \in W$, тогда уравнение $L_0\omega = H(M)$ разрешимо тогда и только тогда, когда правая часть ортогональна ядру оператора L_0^*.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1 и

$$\partial_t\omega + \partial_x\omega \perp \ker L_0^*.$$

Тогда задача

$$L_0\omega = H(M),\ \omega\big|_{t=\zeta=0} = \omega\big|_{x=\eta=0} = 0$$

имеет единственное решение в пространстве W.

Решение итерационных задач. Итерационное уравнение при $k = 0$ имеет решение представимое в виде:

$$\omega_0(M) = \sum_{i=1}^{n}\Big\{v_i^0(x,t)$$
$$+\sum_{j=1}^{n}\Big[c_{i,j}^{1,0}(x,t)\exp(\zeta_j)$$
$$+c_{i,j}^{2,0}(x,t)\exp(\eta_j) \tag{10}$$
$$+\phi(\eta_j-\zeta_j)c_{i,j}^{3,0}(x,t)\exp(\zeta_j)$$
$$+\phi(\zeta_j-\eta_j)c_{i,j}^{4,0}(x,t)\exp(\eta_j)\Big]\Big\}\psi_i(x,t).$$

Относительно входящих функций получим задачи:

$$-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x,t)\ v_i^0(x,t)\psi_i(x,t) = X^T(x,t)f(x,t)$$
$$\equiv \sum_{i=1}^{n} f_i(x,t)\psi_i(x,t), f(x,t) = \left(X^T f, \psi_i^*(x,t)\right)$$
$$\left(\lambda_j(x,t) - \lambda_i(x,t)\right)c_{ij}^l(x,t) = 0$$
$$c_{ii}^{1,0}(x,0) = -v_i^0(x,0), \tag{11}$$
$$c_{ii}^{2,0}(x,t)\big|_{x=0} = -v_i^0(0,t),\ c_{ii}^{3,0}(x,t)\big|_{t=0}$$
$$= -c_{ii}^{2,0}(x,0),\ c_{ii}^{4,0}(x,t)\big|_{x=0} = -c_{ii}^{1,0}(0,t), \mathbb{C}_{ij}^l(x,t)$$
$$= 0, \forall i \neq j.$$

Функции $c_{ii}^{l,0}(x,t)$ пока произвольны, они определятся в следующем шаге из условия разрешимости.

При $k = 1$ итерационное уравнение имеет свободный член следующего вида:

$$F_1(M) = -\sum_{i=1}^{n}\{\partial_t v_i^0 + \partial_x v_i^0$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ki}(x,t)v_k^0(x,t)$$

$$+\left(\partial_t c_{ii}^{1,0} + \partial_x c_{ii}^{1,0} + \sum_{k=1}^{n}\alpha_{ki}(x,t)c_{kk}^{1,0}\right)\exp(\varsigma_i)$$

$$+\left(\partial_t c_{ii}^{2,0} + \partial_x c_{ii}^{2,0} + \sum_{k=1}^{n}\alpha_{ki}(x,t)c_{kk}^{2,0}\right)\exp(\eta_i)$$

$$+\phi(\eta_i - \varsigma_i)\left[\partial_t c_{ii}^{3,0} + \partial_x c_{ii}^{3,0} + \sum_{k=1}^{n}\alpha_{ki}(x,t)c_{kk}^{3,0}\right]\exp(\varsigma_i)$$

$$\phi(\varsigma_i - \eta_i)\left[\partial_t c_{ii}^{4,0} + \partial_x c_{ii}^{4,0} + \sum_{k=1}^{n}\alpha_{ki}(x,t)c_{kk}^{4,0}\right]\exp(\eta_i)\Big\}\psi_i(x,t)$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left(v_i^0(x,t) + c_{ii}^{1,0}(x,t)\exp(\varsigma_i)\right.$$

$$+c_{ii}^{2,0}(x,t)\exp(\eta_i) + c_{ii}^{3,0}(x,t)\phi(\eta_i - \varsigma_i)\exp(\varsigma_i)$$

$$\left.+c_{ii}^{4,0}(x,t)\phi(\varsigma_i - \eta_i)\exp(\eta_i)\right)\sum_{k=1}^{n}\beta_{ik}(x,t)\psi_k(x,t), \alpha_{ik}(x,t)$$

$$= \left(D(x,t)\psi_i, \psi_k^*(x,t)\right),\ \beta_{ik}(x,t) = \left(\partial_t\psi_i + \partial_x\psi_i, \psi_k^*\right).$$

По теореме 1 уравнение с такой правой частью разрешимо, если:

$$\partial_t c_{ii}^l + \partial_x c_{ii}^l + \sum_{k=1}^{n}\alpha_{ki}^1(x,t)c_{kk}^l = 0, \alpha_{ki}^1(x,t) = \alpha_{ki}(x,t) + \beta_{ki}(x,t). \tag{12}$$

Эти уравнения решаются при начальном условии из (11). При этом уравнение для $\mathrm{k} = 1$ имеет решение представимое в виде (10) с индексом 1 вместо 0. Далее можем найти все коэффициенты частичной суммы

$$\tilde{\omega}(M,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n}\varepsilon^k\omega_k(M)$$

и доказать оценку:

$$\omega(M,\varepsilon)\Big|_{\theta=\chi(x,t,\varepsilon)} - \omega_{n\varepsilon}(M)\Big|_{\theta=\chi(x,t,\varepsilon)} < c\varepsilon^{n+1},$$

а следовательно

$$u(x,t,\varepsilon) - \tilde{u}_{n\varepsilon}(M)\Big|_{\theta=\chi(x,t,\varepsilon)} < c\varepsilon^{n+1}. \tag{13}$$

Теорема 3.

Пусть выполнены условия 1)–2). Тогда задача (1) при достаточно малых $\varepsilon > 0$ имеет асимптотическое решение, т. е. имеет место оценка (13).

Литература

1. *Васильева А.Б.* О внутреннем переходном слое при решении системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка / А.Б. Васильева / Дифференциальные уравнения. – 1985. – № 21. – С. 1537–1544.
2. *Бутузов В.Ф.* Об одной сингулярно возмущенной системе уравнений в частных производных первого порядка / В.Ф. Бутузов А.Ф. Каращук // Математические заметки. – 1995. – № 57 (3). – С. 338–349.
3. *Бутузов В.Ф.* Асимптотика решения системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с малым параметром / В.Ф. Бутузов А.Ф. Каращук // Фундаментальная и прикладная математика. – 2000. – № 6 (3). – С. 723–738.
4. *Нестеров А.В.* Асимптотика решения сингулярно возмущенной системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с малой нелинейностью в критическом случае / А.В. Нестеров О.В. Шулико / Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2007. – № 47 (3). – С. 438–444.
5. *Нестеров А.В.* Асимптотика решения задачи Коши для сингулярно возмущенной системы гиперболических уравнений / А.В. Нестеров / Сборник Чебышева. – 2011. – № 12 (3). – С. 93–105.
6. *Нестеров А.В.* Об асимптотике решения сингулярно возмущенной системы уравнений в частных производных первого порядка с малой нелинейностью в критическом случае / А.В. Нестеров // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2012. – № 52 (7). – С. 1267–1276..
7. *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений / С.А. Ломов. – М.: Наука, 1981.
8. *Уилкинсон Дж.Х.* Алгебраическая проблема собственных значений / Дж.Х. Уилкинсон. – М.: Наука, 1970.

Ж.А. Сартабанов, Г.М. Айтенова
(Казахстан)

ОГРАНИЧЕННЫЕ ВДОЛЬ ЛИНИЙ МНОГОПЕРИОДИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМАХ КОНВЕКТИВНО-ДИФФУЗИОННОГО ТИПА

Аннотация. Рассмотрена задача существования многопериодических колебаний в линейных и квазилинейных системах, описывающих процессы конвективно-диффузионного типа. Получены достаточные условия многопериодических колебаний по временным переменным в линейных системах и это же распространено на квазилинейные системы.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное; многопериодичность; конвективный; диффузионный; матрицант; матричный оператор дифференцирования.

В работе рассматривается явление, связанное с распространением многопериодических конвективно-диффузионных колебаний с экспоненциально убывающей амплитудой вдоль положительной полуоси.

Ставится задача о существовании и единственности решения системы вида

$$D_c v(x,t,\tau) = a^2 v_{xx}(x,t,\tau) - \chi v_x(x,t,\tau) + \\ + L(t,\tau) v(x,t,\tau) + \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} K(t,\tau,\sigma,s) v(x,\sigma,s)\,ds + g(x,t,\tau), \tag{1}$$

где $v(t,\tau) = (v_1(t,\tau),...,v_n(t,\tau))$ искомая вектор-функция, $D_c = \frac{\partial}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^{m} c_j \frac{\partial}{\partial t_j}$ оператором дифференцирования по $(\tau, t) \in R \times R^m$ по направлению векторного поля $dt/d\tau = c$, $t = (t_1,...,t_m)$, $c = (c_1,...,c_m)$, $\sigma = t - c\tau + cs$ – характеристический интеграл оператора D_c, $\varepsilon > 0$ – период эредитарности; $L(t,\tau) = M(t,\tau) - \delta E$, E – единичная матрица; $M(t,\tau)$ – матрица и $K(t,\tau,\sigma,s)$ – ядро интегрального члена, a, χ, δ – положительные постоянные; $g(x,t,\tau)$ – заданная n-вектор-функция; $x \in [0,+\infty)$.

Концентрация $v(x,t,\tau)$ очищающего вещества в потоке удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$v(x,t,\tau)\big|_{x=0} = v^0(t,\tau) \equiv v^0(t+\omega,\tau+\theta) \in C_{t,\tau}^{(e,1)}(R^m \times R), \tag{2}$$

$$v(x,t,\tau)\big|_{x\to\infty} = 0, \tag{3}$$

$e = (1,...,1)$ – m-вектор.

Без внешнего воздействия концентрация вещества в потоке описывается однородной многопериодической по (t,τ) системой

$$D_c v(x,t,\tau) = a^2 v_{xx}(x,t,\tau) - \chi v_x(x,t,\tau) - \delta v(x,t,\tau) + \\ + L(t,\tau) v(x,t,\tau) + \int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} K(t,\tau,\sigma,s) v(x,\sigma,s)\,ds \tag{4}$$

с гладкой (ω,θ)-периодической матрицей $L(t,\tau)$ и ядром $K(t,\tau,\sigma,s)$

$$L(t+\omega,\tau+\theta) = L(t,\tau) \in C_{t,\tau}^{(e,1)}(R^m \times R),$$

$$K(t+\omega,\tau+\theta,\sigma,s) = K(t,\tau,\sigma+\omega,s+\theta) = K(t,\tau,\sigma,s) \in C_{t,\tau,\sigma,s}^{(e,1,e,1)}(R^m \times R \times R^m \times R).$$

Доказывается, что решение поставленной задачи существует и единственно.

Далее исследуется вопрос о распространении колебания линейных многопериодических и нелинейных конвективно-диффузионных многопериодических уравнений вдоль замкнутой линии.

В данной работе развиваются методы [1, 2], касающиеся общей теории рассмотренных задач и используются приемы [3] по установлению многопериодических колебаний.

Литература

1. *Вольтерра В.* Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений / В. Вольтерра. – М.: Наука, 1982. – 304 с.
2. *Фарлоу С.* Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров / С. Фарлоу; пер. с англ. А.И. Плиса; под ред. С.И. Похожаева. – М.: Мир, 1985. – 383 с.

3. *Sartabanov Zh.A.* Multiperiodic solutions of quasilinear systems of integro-differential equations with Dc-operator and e-period of hereditarity / Zh.A. Sartabanov, G.M. Aitenova, G.A. Abdikalikova // Eurasian Math. J. – 2022. – № 1. – P. 86–100.

Ж.Ш. Сафаров
(Узбекистан)

НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В КВАДРАТЕ

Аннотация. Рассматривается неоднородное интегро-дифференциальное уравнение гиперболического типа в квадрате. На основе метода разделения переменных задача сводится к решению обыкновенных дифференциальных уравнений, относительно коэффициентов разложения в ряды Фурье искомой функции. Доказана теорема существования и единственности решения поставленной задачи.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение; ядро интеграла; неравенство Гроноулло; метод Фурье; неравенства Бесселя.

Введение и постановка задачи. К интегро-дифференциальным уравнениям относят такие функциональные уравнения, в которых неизвестная функция и ее производные входят как под знак интеграла, так и могут находиться вне его. Математическое описание законов функционирования таких объектов было предложено В. Вольтерра в серии статей [1] и обзора [2] на основе интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, которые впоследствии были названы его именем, и остается актуальным в настоящее время. Ряд глубоких результатов о корректной разрешимости вольтерровых интегро-дифференциальных уравнений первого и второго порядка, не разрешенных относительно старшей производной, а также результатов о спектре соответствующих оператор-функций получен Н.Д. Копачевским и его учениками [3, 5]. Укажем также работу Л. Пандолфи [6], в которой изучалась задача для уравнения типа Гуртина – Пипкина.

В настоящей работе исследуются вопросы разрешимости интегро-дифференциального уравнения в ограниченной области (в квадрате).

В области $D_{Tl} = \Omega \times (0,T)$, $\Omega = \{(x,y) : 0 < x < l, 0 < y < l\}$ рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$u_{tt} - \Delta u = \int_0^t k(\tau) u(x,y,t-\tau) d\tau + g(x,y,t) \tag{1}$$

с начальными

$$u|_{t=0} = \varphi(x,y),\ u_t|_{t=0} = \psi(x,y), 0 \le x, y \le l \tag{2}$$

и граничными условиями

$$u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=l} = 0,\ 0 \le y \le l,\ 0 \le t \le T \tag{3}$$

$$u|_{y=0} = 0,\ u|_{y=l} = 0,\ 0 \le x \le l,\ 0 \le t \le T, \tag{4}$$

где $k(t), \varphi(x,y), \psi(x,y)$ и $g(x,y,t)-$ заданные функции.

Требуется найти функцию $u(x,y,t) \in D_{\mathrm{тl}}$, удовлетворяющую условиям (1.1)–(1.4).

Теорема единственности. Рассмотрим следующую вспомогательную задачу для функции $v(x,y)$:

$$\Delta v + \lambda^2 v = 0, (x, y \in \Omega,)$$
$$v\big|_{x=0} = 0,\ v\big|_{x=l} = 0, v_{y=0} = 0,\ v\big|_{y=l} = 0.$$

Известно, что [7] собственные функции и соответствующие собственные значения этой задачи имеют вид

$$v_{mk}(x,y) = \frac{2}{l} sin\lambda_m x \sin v_k y, \tag{5}$$

$$\lambda_{mk}^2 = \lambda_m^2 + v_k^2;\ \ \lambda_m = \frac{\pi m}{l},\ v_k = \frac{\pi k}{l}\ ,\ \ m,k \in N.$$

Теорема 1. Если решение задачи (1)–(4) существует и удовлетворяет условиям

$$\lim_{x\to 0+} u_x \sin\frac{\pi m x}{l} = \lim_{x\to l-} u_x \sin\frac{\pi m x}{l} = 0,\ \ 0 \le y \le l,\ \ 0 \le t \le T; \tag{6}$$

$$\lim_{y\to 0+} u_y \sin\frac{\pi m x}{l} = \lim_{y\to l-} u_y \sin\frac{\pi m x}{l} = 0,\ \ 0 \le x \le l,\ \ 0 \le t \le T, \tag{7}$$

то оно единственное.

Доказательство. Пусть функция $u(x,y,t)$ решение задачи (1)–(4), удовлетворяющее условиям (6) и (7). Введем в рассмотрение следующий интеграл:

$$u_{m,k}(t) = \iint_\Omega u(x,y,t)\, v_{mk}(x,y)\, dxdy. \tag{8}$$

Через $u_{m,k}^{\varepsilon,\delta}(t)$ обозначим интеграл по области

$$\Omega^{\varepsilon\delta} = \{(x,y) : \varepsilon \le x \le l - \grave{o}, \delta \le y \le l - \delta\}:$$

$$u_{m,k}^{\varepsilon,\delta}(t) = \iint_{\Omega^{\varepsilon\delta}} u(x,y,t)\, v_{mk}(x,y)\, dxdy, \tag{9}$$

где $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ – достаточно малые вещественные числа.

Продифференцировав уравнение (9) два раза по t и используя (1) получим

$$\begin{gathered}\left(u_{m,k}^{\varepsilon,\delta}(t)\right)'' = \iint_{\Omega^{\varepsilon\delta}} u_{tt}(x,y,t) v_{mk}(x,y)\, dxdy = \\ \iint_{\Omega^{\varepsilon\delta}} \left[\Delta u + \int_0^t k_0(\tau)\, u(x,y,t-\tau) + g(x,y,t)\right] v_{mk}(x,y)\, dxdy = \\ \iint_{\Omega^{\varepsilon\delta}} \left[\int_{xx} v_{mk}(x,y)\, dxdy + \iint_{\Omega^{\varepsilon\delta}} u_{yy} v_{mk}(x,y)\, dxdy + \right. \\ \left.[\tau)\, u(x,y,t-\tau)\, d\tau + g(x,y,t)\right] v_{mk}(x,y)\, dxdy = J_1 + J_2 + G_{mk}^{\varepsilon\delta}(t),\end{gathered} \tag{10}$$

где

$$G_{mk}^{\varepsilon\delta}(t) := \iint_{Щ^{\varepsilon\delta}} \left[\int_0^t k_0(\tau)\, u(x,y,t-\tau)\, d\tau + g(x,y,t)\right] v_{mk}(x,y)\, dxdy\ .$$

Интегрируя по частям интегралы J_1 и J_2, имеем:

$$J_1 = \int_{\delta}^{l-\delta} dy \left(u_x v_{mk}(x,y)\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} - u(x,y,t)\left(v_{mk}(x,y)\right)_x\Big|_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} u(x,y,t)\left(v_{mk}(x,y)\right)_{xx} dx \right)$$

$$J_2 = \int_{\varepsilon}^{l-\varepsilon} dx \left(u_y v_{mk}(x,y)\Big|_{\delta}^{l-\delta} - u(x,y,t)\left(v_{mk}(x,y)\right)_y\Big|_{\delta}^{l-\delta} + \int_{\delta}^{l-\delta} u(x,y,t)\left(v_{mk}(x,y)\right)_{yy} dy \right)$$

Если в интегралах J_1 и J_2 переходит к пределу при $\varepsilon \to 0, \delta \to 0$, то используя формулы (3), (4), (6) и (7) из (10) получим,

$$u''_{mk}(t) = -\lambda_{mk}^2 \iint_{\Omega} u(x,y,t) v_{mk}(x,y)\,dxdy + G_{mk}(t) = -\lambda_{mk}^2 u_{mk}(t) + G_{mk}(t), \tag{11}$$

где

$$G_{mk}(t) := \iint_{Щ} g(x,y,t) v_{mk}(x,y)\,dxdy + \iint \left[\int_{\Omega}^{t} k(\tau) u(x,y,t-\tau)\,d\tau\right] v_{mk}(x,y)\,dxdy.$$

В дальнейшем слагаемые $G_{mk}(t)$ обозначим через $F_{mk}(t)$ и $U_{mk}(t)$, соответственно.

Уравнение (10) эквивалентно следующему интегральному уравнению:

$$u_{mk}(t) = \frac{1}{\lambda_{mk}} \int_0^t \sin\lambda_{mk}(t-s) G_{mk}(s)\,ds + \left(C_{mk}^1 \cos\lambda_{mk} t + C_{mk}^2 \sin\lambda_{mk} t\right), \tag{12}$$

где $C_{mk}^i, i = 1, 2$, произвольные постоянные. Используя начальные условия (2) из формулы (4) Получим

$$u_{m,k}(0) = \iint_{Щ} u(x,y,0) v_{mk}(x,y)\,dxdy = \iint_{\Omega} \varphi(x,y) v_{mk}(x,y)\,dxdy = \varphi_{mk}, \tag{13}$$

$$u'_{m,k}(0) = \iint_{\Omega} u_t(x,y,0) v_{mk}(x,y)\,dxdy = \iint_{\Omega} \psi(x,y) v_{mk}(x,y)\,dxdy = \psi_{mk}. \tag{14}$$

Из (12), (13) и (14) следует, что $C_{mk}^1 = \varphi_{mk}, C_{mk}^2 = \frac{1}{\lambda_{mk}}\psi_{mk}$ · Таким образом (12) можно записать следующим образом:

$$u_{mk}(t) = \varphi_{mk}\cos\lambda_{mk} t + \frac{1}{\lambda_{mk}}\psi_{mk}\sin\lambda_{mk} t + \frac{1}{\lambda_{mk}}\int_0^t \sin\lambda_{mk}(t-s) G_{mk}(s)\,ds. \tag{15}$$

Отсюда следует, что решение задачи (1)–(4) единственно, так как при $\varphi(x,y) \equiv 0, \psi(x,y) \equiv 0, k(t) \equiv 0$ и $g(x,y,t) \equiv 0$ получаем тождества $\varphi_{mk} \equiv 0, \psi_{mk} \equiv 0, G_{mk} \equiv 0$, и тогда из формулы (14) следует, что $u_{mk} \equiv 0$. Ввиду формулы (8) последнее равенство равносильно тому, что

$$\iint_{\Omega} u(x,y,t) v_{mk}(x,y)\,dxdy = 0.$$

Поскольку система v_{mk} полна в пространстве $L_2(\Omega)$, функция при любом $t \in [0,T]$. Так как функция $u(x,y,t) \in C^2(D_{Tl})$ заключаем, что $u(x,y,t) \equiv 0$ на D_{Tl}. Таким образом, мы доказали единственность решения задачи (1)–(4).

Основной результат.

Лемма 1. При достаточно больших т и k справедливы следующие оценки:

$$|u_{mk}| \le K_1 \left(|\varphi_{mk}| + \frac{1}{\lambda_{mk}}|\psi_{mk}| + \frac{1}{\lambda_{mk}}|F_{mk}(t_M)| \right), t \in [0,T],$$

$$|u''_{mk}| \le K_2 \left(\lambda_{mk}|\varphi_{mk}| + \lambda_{mk}^2|\psi_{mk}| + \lambda_{mk}|F_{mk}(t_M)| \right), t \in [0,T]$$

где $\mathrm{K}_1, \mathrm{K}_2 -$ константы которые, зависят только от $\mathrm{t}, \mathrm{F}_{\mathrm{mk}}\left(\mathrm{t}_{\mathrm{M}}\right) = \max_{\mathrm{t}\in[0,\mathrm{T}]}\left|\mathrm{F}_{\mathrm{mk}}\left(\mathrm{t}\right)\right|$.

Доказательство леммы непосредственно следует из формулы (15) с применением неравенство Гроноулло.

Лемма 2. Если $\varphi\left(x, y\right) \in C^4\left(\overline{\Omega}\right), \psi\left(x, y\right) \in C^4\left(\overline{\Omega}\right), F\left(x, y, z\right) \in C^4\left(\overline{D}_{Tl}\right)$ и выполнены условия

$$\varphi\left(0, y\right) = \varphi\left(l, y\right) = 0, 0 \le y \le l, \varphi\left(x, 0\right) = \varphi\left(x, l\right) = 0, 0 \le x \le l \,, \tag{16}$$

$$\psi\left(0, y\right) = \psi\left(l, y\right) = 0, 0 \le y \le l, \psi\left(x, 0\right) = \psi\left(x, l\right) = 0, 0 \le x \le l \,, \tag{17}$$

$$F\left(l, y, t\right) = 0, 0 \le y \le l, F\left(x, 0, t\right) = F\left(x, l, t\right) = 0, 0 \le x \le l, 0 \le t \le T \,, \tag{18}$$

то справедливы следуюшие представления:

$$\varphi_{mk} = \frac{\varphi_{mk}^{(4)}}{\lambda_m^2 \nu_k^2}, \psi_{mk} = \frac{\psi_{mk}^{(4)}}{\lambda_m^2 \nu_k^2}, g_{mk}\left(t\right) = \frac{g_{mk}^{(4)}\left(t\right)}{\lambda_m^2 \nu_k^2}. \tag{19}$$

Здесь $\varphi_{mk}^{(4)},\ \psi_{mk}^{(4)},\ g_{mk}^{(4)}\left(t\right) -$ коэффициенты разложения функций $\varphi_{xxyy}\left(x, y\right), \psi_{xxy}\left(x, y\right) g_{xxyy}\left(x, y, t\right)$, в ряд Фурье относительно системы функций $\left\{\frac{1}{l}, \frac{2}{l}\sin\lambda_m x \sin\nu_k y\right\}, m \ge 0, k \ge 0$ такие, что

$$\sum_{m,k=1}^{\infty}\left|\varphi_{mk}^{(4)}\right|^2 \le \iint_\Omega\left(\varphi_{xxyy}^{(4)}\left(x, y\right)\right)^2 dxdy,\ \ \sum_{m,k=1}^{\infty}\left|\psi_{mk}^{(4)}\right|^2 \le \iint_\Omega\left(\psi_{xyy}^{(4)}\left(x, y\right)\right)^2 dxdy, \tag{20}$$

$$\sum_{m,k=1}^{\infty}\left|g_{mk}^{(4)}\left(t\right)\right|^2 \le \iint_\Omega\left(g_{xxyy}^{(4)}\left(x, y, t\right)\right)^2 dxdy,\ \ 0 \le t \le T. \tag{21}$$

Доказательство. Интегрируя по частям четыре раза уравнений (8), (13) и (14) (два раза по x и два раза по y), учитывая условия (16)–(18), получаем формулы (19). Неравенства (20) и (21) представляют собой неравенства Бесселя относительно ортонормированной системы

$$\left\{\frac{1}{l}, \frac{2}{l}\sin\lambda_m x \sin\nu_k\right\}, m \ge 0, k \ge 0.$$

Решение задачи (11)–(14) будем искать в виде ряда Фурье:

$$u\left(x, y, t\right) = \sum_{m,k=1}^{\infty} u_{mk}\left(t\right) v_{mk}\left(x, y\right). \tag{22}$$

Формально продифференцировав ряд (22) почленно, получим следующие ряды:

$$u_{tt} = \sum_{m,k=1}^{\infty} u''_{mk}\left(t\right) v_{mk}\left(x, y\right),\ u_{xx} = \sum_{m,k=1}^{\infty} \lambda_m^2 u_{mk}\left(t\right) v_{mk}\left(x, y\right), u_{yy} = \sum_{m,k=1}^{\infty} \mu_k^2 u_{mk}\left(t\right) v_{mk}\left(x, y\right).$$

Полученные ряды по лемме 1 мажорируются сходящимся числовым рядом

$$K_3\left(\lambda_{mk}^2\left|\varphi\right| + \lambda_{mk}\left|\psi\right| + \lambda_{mk}\left|G_{mk}^1\left(t_M\right)\right|\right).$$

Следовательно, имеет место следующая теорема.

Теорема 2. Если функции $\varphi(x,y)$, $\psi(x,y)$ *и* $G(x,y,t)$ удовлетворяют условиям леммы 2, существует единственное решение задачи (1.1)–(1.4).

Литература

1. *Вольтерра В.* Теория функционалов и интегральных и интегро-дифференциальных уравнений / В. Вольтерра. – М.: Наука, 1982 – 304 с.
2. *Иосида К.* Функциональный анализ / К. Иосида. – М.: Наука, 1976. – 286 с.
3. *Копачевский Н.Д.* Интегро-дифференциальные уравнения Вольтерра в гильбертовом пространстве: специальный курс лекций / Н.Д. Копачевский. – Симферополь: ЛКИ, 2007. – 624 с.
4. *Kopachevsky N.D., Syomkina E.V.* Linear Volterra integro-differential secondorder equations unresolved with respect to the highest derivative // Eur. Math. J. – 2013. – Vol. 4. – No. 4. – Pp. 64–87.
5. *Zakora D.A.* Abstract linear Volterra second-order integro-differential equations // Eurasian Math. J. – 2016. – Vol. 7. – No. 2. – Pp. 75–91.
6. *Pandolfi L.* The controllability of the Gurtin – Pipkin equations: a cosine operator approach // Applied Mathematics and Optimization. – 2005. – Vol. 52. – Pp. 143– 165, pp. 753–763.
7. *Sabitov K.B., Zainullov A.R.* Inverse Problems for a Two-Dimensional Heat Equation with Unknown Right-Hand Side // Russian Mathematics. – 2021. – Vol. 65. – No. 3. – Pp. 75–88.

А.В. Юлдашева
(Узбекистан)

О ЛОКАЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛАСТИКИ

Аннотация. Перидинамическая теория представляет собой нелокальную теорию механики сплошных сред, основанную на интегро-дифференциальном уравнении без пространственных производных, которая может быть легко применена вблизи трещин, где возникают разрывы в поле перемещений. В работе иследуется задача Коши для нелинейного уравнения перидинамики. Обсуждаются вопросы локальной корректности и гладкости решений.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение; перидинамика; сжимающие отображения; локальная разрешимость.

1. Введение

Перидинамическая теория твердых тел, в основном предложенная Силлингом [1], представляет собой альтернативную формулировку нелинейной динамики для упругих материалов и привлекает внимание все большего числа исследователей. Важнейшей особенностью перидинамической теории является то, что сила, действующая на материальную частицу вследствие взаимодействия с другими частицами, записывается в виде функционала поля перемещений. Это означает, что перидинамическая теория является теорией нелокального континуума и в отношении нелокальности сильно напоминает более традиционные теории нелокальной упругости, которые в основном основаны на интегральных определяющих соотношениях [2, 3, 4]. Как и в других нелокальных теориях упругости, основная идея состоит в том, чтобы предложить обобщенную теорию упругости, которая включает в себя влияние дальнодействующих внутренних сил молекулярной динамики, которыми пренебрегают в традиционной теории упругости.

Другая особенность перидинамической теории состоит в том, что в перидинамическом уравнении движения отсутствуют пространственные производные от поля перемещений, что позволяет использовать уравнения перидинамики даже в точках разрыва.

2. Постановка задачи. В отличие от классической механики сплошных сред, описываемой уравнениями с частными производными, перидинамическая модель приводит к задаче Коши для интегро-дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + \alpha(x,t)\frac{\partial u}{\partial t} + \int_\Omega F\left(u(x,t) - u(y,t), x - y\right)dy = f(x,t), x \in \Omega, t > 0 \qquad (1)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), x \in \Omega, \qquad (2)$$

где $\Omega \subset R^n$ – область с кусочно-гладкой границей.

Здесь предполагается, что неизвестная функция: $u : \Omega \times [0,T] \to R^n$, ядро: $F : (\Omega \times [0,T]) \times \Omega \to R^n$ и внешняя сила: $f : \Omega \times [0,T] \to R^n$ являются векторными функциями.

В данной работе, мы предполагаем, что вектор-функция F имеет вид

$$F(u,x) = Q(x)P(u), \qquad (3)$$

где $P : R^n \to R^n$ – абсолютно непрерывная вектор-функция, удовлетворяющая условию $P(0) = 0$, а $Q : R^n \to R^n \times R^n$ – матрица-функция, которая может иметь особенность в нуле, но должна быть интегрируема в некоторой степени.

Наиболее важный пример дают функции

$$P(u) = u, Q(x) = \frac{x \otimes x}{|x|^\alpha},$$

отвечающие линеаризованной модели перидинамики ([1, 5, 7]).

Поскольку основной проблемой перидинамики является описание сильных разрывов решений, будем искать решение задачи (1)–(2) в классах $L_p(\Omega)$.

Также предполагается, что функция $P \in L_p(\Omega)$, а ее якобиан удовлетворяет условию

$$\left|\frac{\partial P(u)}{\partial u}\right| \le \Phi(|u|), \qquad (4)$$

где $\Phi : R_{+\to R_+}$ – некоторая возрастающая функция.

3. Сформулируем основной результат работы о локальной разрешимости задачи (1)–(2).

Теорема 1. Пусть для некоторого q > 1 функция $Q(x) \in L_q(\Omega)$. Тогда существует некоторое T > 0 такое, что при, $\varphi, \psi \in L_p(\Omega)$, $\alpha(x,t) \in C^1(\Omega \times [0,T])$ и $f \in L_p(\Omega \times [0,T])$, задача (1)–(2) имеет единственное решение из класса $C^2([0,T], L_p(\Omega))$, где $p = \dfrac{q}{q-1}$.

Отличие данного уравнения от уравнения, рассмотренного в работе [9], лишь в наличии слагаемого $\alpha(x,t)u_t$. Но как оказалось, именно оно существенно влияет на разрешимость задачи. И в отличие от работы [9] мы не можем говорить о глобальной разрешимости задачи.

Литература

1. *S.A. Silling*. Reformulation of elasticity theory for discontinuities and long-range forces // J. Mech. Phys. Solid. 48 (2000), pp.175–209.
2. *I.A. Kunin*. Elastic Media with Microstructure. Vol. I and II. Springer, Berlin, 1982.
3. *D. Rogula*. Nonlocal Theory of Material Media, Springer, Berlin, 1982.
4. *A.C. Eringen*. Nonlocal Continuum Field Theories, Springer. – New York, 2002.
5. *S.A. Alimov, S.N. Sheraliev.* On the solvability of the singular equation of peridynamics // Complex Variables and Elliptic Equations 64:5(2019), pp. 873–887.
6. *S.N. Sheraliev*. On the solvability of the quasi-linear periodic problem of peridynamics // Bulletin of the Institute of Mathematics), No 3, Tashkent, 2020, pp. 86–93.
7. *L.V. Kantorovich, G.P. Akilov*. Functional analysis 2nd ed. Oxford, Pergamon Press, 589 p., 1982.
8. *Sh.A. Alimov, A.V. Yuldasheva*. On the Solvability of the Peridynamic Equation with a Singular Kernel // Differential Equations, 57:3 (2021), pp. 353–365.
9. *Юлдашева А.В.* О разрешимости нелинейного уравнения перидинамики / А.В. Юлдашева // Bull. Inst. Math. – 2022. – Vol. 5. – № 1. – С. 156–160.

Mersaid Aripov, M. Bobokandov
(Uzbekistan)

CAUCHY PROBLEM FOR A DOUBLY NONLINEAR PARABOLIC NON-DIVERGENCE FORM EQUATION WITH SOURCE

Abstract. In this paper, we consider Cauchy problem to a doubly nonlinear parabolic non-divergence form with nonlinear source term:

$$\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} = u^q \operatorname{div}\left(\rho(x)u^{m-1}\left|\nabla u^k\right|^{p-2}\nabla u^l\right) + \rho(x)u^\beta, (t,x) \in Q \quad (1)$$

$$u\big|_{t=0} = u_0(x) \geq 0, x \in \mathbb{R}^N \quad (2)$$

with nontrivial, nonnegative initial data. Here

$$Q = \left\{(t,x)\middle| t > 0, x \in \mathbb{R}^N\right\}, \rho(x) = \left| x \right|^n, k, m, l \geq 1, p\rangle 2, \beta > 1, 0 < q < 1, n$$

We show that, the solution of the Cauchy problem (1)-(2) blows up in finite time.

Keywords: parabolic equation; self-similar equation; self-similar solution; blow-up.

In 1966, Fujita [1] considered the following initial value problem

$$\begin{aligned} &u_t = \Delta u + u^p, x \in \mathbb{R}^N, t > 0 \\ &u(x,0) = u_0(x), x \in \mathbb{R}^N, \end{aligned} \quad (3)$$

Where $N \geq 1, p > 1$ and $u_0(x)$ is a bounded positive continuous function. They proved that the problem (3) does not have any nontrivial, nonnegative global solution if $1 < p < p_c = 1 + \dfrac{2}{N}$, whereas if $p > p_c$, there exist both global and blowing up solutions. Such a number p_c is then called to be the critical Fujita exponent.

We say that $u(t,x)$ is the weak solution to the problem (1)–(2) in $Q_T = \{(t,x) | 0 < t < T, x \in \mathbb{R}^N\}$ if $u(t,x) \in C(Q_T), \nabla u \in L^1_{loc}\left(0,T; L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^N\right)\right)$ and (1)–(2) is satisfied in the sense of distribution in Q_T, where $T > 0$ is the maximal existence time. The local existence in time and uniqueness of solutions and the comparison principle for the problem (1)–(2) can be found in [2]. In this context, the solution $u(t,x)$ is called blow-up in finite time $T > 0$ if $\max_{t\to T^-} u(t,x) \to +\infty$.

We introduce the notation $u = v^{1/1-q}$ and put this into the equation (1)–(2)

$$\frac{\rho(x)}{1-q}\frac{\partial v}{\partial t} = \operatorname{div}\left(\rho(x) v^{m_2-1} \left|\nabla v^{k_2}\right|^{p-2} \nabla v^{l_2}\right) + \rho(x) v^{\beta_2} \tag{4}$$

$$v|_{t=0} = v_0(x) \tag{5}$$

Where $m_2 = \dfrac{m-q}{1-q}, k_2 = \dfrac{k}{1-q}, l_2 = \dfrac{l}{1-q}, \beta_2 = \dfrac{\beta - q}{1-q}$.

Let $C_b\left(\mathbb{R}^N\right)$ be the space of all bounded continuous functions in $\mathbb{R}^N$. For $a \ge 0$, we define

$$\Phi_a = \left\{\phi(x) \in C_b\left(\mathbb{R}^N\right) \mid \phi(x) \ge 0, \lim_{|x|\to\infty}\sup |x|^a \phi(x) > 0\right\}. \tag{6}$$

We denote

$$\beta_c = q + m + k(p-2) + l - 1 + \frac{p(1-q)}{N},\ a_c = \frac{p}{\beta - (q + m + k(p-2) + l - 1)}.$$

Theorem 1. For $N \ge 2, m \ge 1, p > 2, k > 1, l > 1$ and $1 < \beta < \beta_c$, suppose that $u_0(x) \in \Phi_a$ for some $a \in (0, a_c)$, then the solution $v(t,x)$ of the Cauchy problem (4) blows up in finite time.

The numerical results show quick convergence of the iterative process to the solution of the Cauchy problem (1)–(2), due to the successful choice of the initial approximation. Below, some numerical experiment results for different numerical parameter values are presented. Grid step is small enough $h_x = 0.01$, the number of nodes $n = 400$ and the iteration accuracy is defined $\varepsilon = 0.001$. The score was conducted until $t_0 = 0.01, T = 1$ with a step $h_t = 0.02$.

The initial approximation was taken in the form

$$u(x) = \left(A\bar{v}\left(a - \xi^{\gamma_1}\right)_+^{\gamma_2}\right)^{\frac{1}{1-q}}$$

Here:

$$\bar{v}(t) = \left[T_0 - (1-q)(\beta_2 - 1)t\right]^{\frac{1}{1-\beta_2}}, T_0 \ge 0, \xi = |x|\tau^{-\frac{1}{p}}, \tau(t) =$$

$$= \frac{\left[T_0 - (1-q)(\beta_2 - 1)t\right]^{\frac{h_1}{(1-q)(1-\beta_2)}}}{h_1}$$

$$h_1 = (1-q)\left(m_2 + k_2\left(p-2\right) + l_2 - 1 - \beta_2\right), \gamma_1 = \frac{p}{p-1}, \gamma_2 = \frac{p-1}{m_2 + k_2\left(p-2\right) + l_2 - 1}$$

$$A = \left(\frac{1}{\gamma_1\gamma_2}\left(\frac{1}{p(1-q)\,l_2 k_2^{p-2}}\right)^{\frac{1}{p-1}}\right)^{\gamma_2}, a = \text{ const} > 0, (d)_+ = m(d, 0)$$

Figure 1 shows a compactly supported solution of the problem (1)-(2). In Figure 2 shows the properties of the solution of the problem (1)-(2), vanishing at infinity.

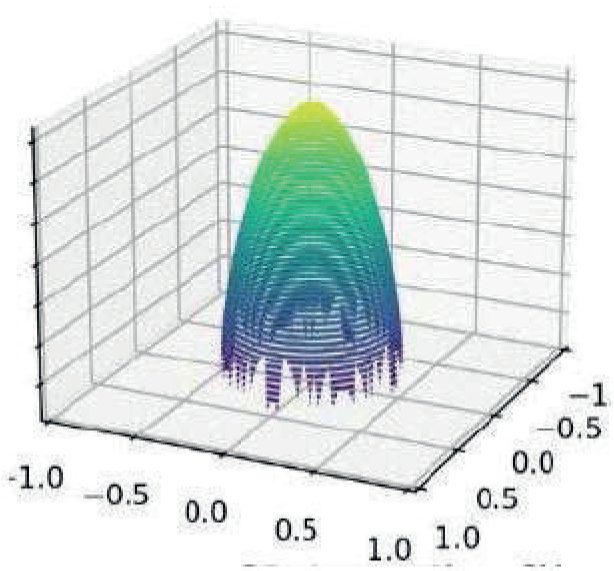


Figure 1 – $\mathrm{q} = 0.1, \mathrm{k} = 1.5, \mathrm{p} = 2, \ \mathrm{m} = 5.42, \mathrm{n} = \mathrm{l} = 1, \beta = 6.5$

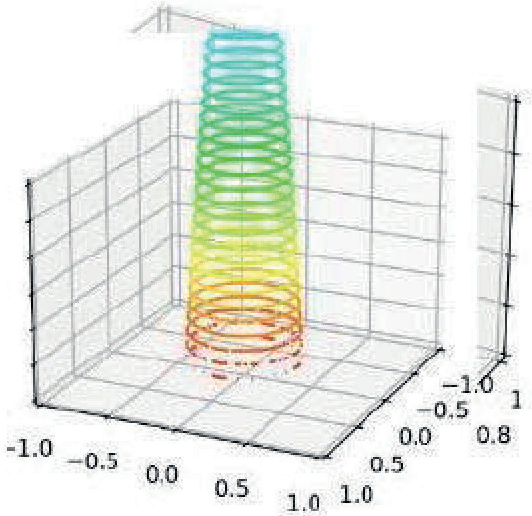


Figure 2 – $\mathrm{q} = 0.1, \mathrm{k} = 0.9, \mathrm{p} = 5.2, \ \mathrm{m} = 2, \mathrm{n} = 2, l = 1.1, \beta = 1.9$

We note that due to no uniqueness of solutions many different cases arises in the numerical study of the problem (1)-(2). Therefore, the question arises of selecting a good an initial approximation preserving properties of nonlinearity. Depending on the parameters of the equation, this difficulty is overcome by appropriate choice of initial approximations, which are taken as asymptotic formulas mentioned above. On the basis of the above qualitative studies were produced the numerical calculations. The numerical results show quickly convergence of the iterative process to the solution of the Cauchy problem (1)–(2), if we will use as an initial approximation the solutions of self-similar equations, constructed by the method of nonlinear splitting and by the method of standard equation [2].

References

1. *H. Fujita*. On the blowing up of solutions of the Cauchy problem for // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec., 1966, № 13, pp. 109–124.
2. *M. Aripov and S. Sadullaeva*. Computer simulation of nonlinear diffusion processes, Tashkent, National University of Uzbekistan Press, 2020, 670 pp.
3. *M. Aripov, A. Matyakubov and B. Imomnazarov*. The Cauchy problem for a nonlinear degenerate parabolic system in non-divergence form // Mathematical notes of NEFU, 2020, 27 (3), pp. 27–38.
4. *M. Aripov, A.S. Matyakubov, J.O. Khasanov and M.M. Bobokandov*. Mathematical modeling of double nonlinear problem of reaction diffusion in not divergent form with a source and variable density// Journal of Physics, 2021, 2131,

K.G. Kozhobekov, G.A. Omaralieva, D.A. Tursunov
(Kyrgyzstan)

ASYMPTOTICS OF THE SOLUTION OF BISINGULAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS WITH A BIBOUNDARY LAYER

Abstract. The two-point boundary value problems for a second-order ordinary differential equation with a small parameter at the highest derivative and a singular initial point is studied. A sufficient condition is found under which an intermediate boundary layer appears in bisingularly perturbed second-order ordinary differential equations. A complete asymptotic expansion of the solution in the form of an asymptotic series in the sense of ErdBrelyi is constructed using a modified method of boundary functions.

Keywords and phrases: boundary layer; intermediate boundary layer; boundary value problem; biboundary layer; bisingular problem; modified boundary function method; asymptotic solution.

1. Introduction

Differential equations with a small (or large) parameter appear where there are uneven transitions from one physical characteristic to another. In the study of such problems, new various phenomena arise, so the methods of their asymptotic integration are developed separately for different classes of problems [1–10].

In this regard, the relevance of the results of research in this area is beyond doubt. As we know, problems with double singularity, i.e., bisingularly perturbed problems, have been little studied in comparison with singularly perturbed problems. As noted in [11, Ch. II], [12, Ch. 7] in bisingular problems, one feature is related to the singular dependence of the solution on a small parameter, and the other is related to the non-smoothness of the terms of the asymptotics. We study bisingular problems in which additional features appear, for example, intermediate or additional (boundary or inner) layers. The novelty of this work lies in the fact that for a specific bisingular problem, a sufficient condition for the existence of an intermediate boundary layer is obtained. With the help of an original approach, the essence of which is that instead of the universal method of matching asymptotic expansions, developed and successfully applied in the scientific school of A. M. Ilyin, the auxiliary function method is used, which makes it possible to obtain a uniform asymptotic expansion for the class of problems under consideration using a simpler procedure. In addition, the problem under consideration contains two small subordinate parameters, and the authors investigate the question of what ratios of these parameters give rise to additional asymptotic layers.

2. Formulation of the problem

Consider two-point boundary value problems generated by a second-order ordinary differential equation with a small parameter at the highest derivative:

$$\varepsilon^n y_\varepsilon''(x)+x^k p(x)y_\varepsilon'(x)+\left(x^k q(x)-\varepsilon^m r(x)\right)y_\varepsilon(x)=f(x),\ x\in(0,1), \tag{1}$$

and one of the boundary conditions of the following types:

$$y_\varepsilon(0)=a,\ y_\varepsilon(1)=b, \tag{2}$$

$$y_\varepsilon'(0)=a,\ y_\varepsilon'(1)=b, \tag{3}$$

$$y_\varepsilon(0)=\alpha y_\varepsilon'(0)=a,\ y_\varepsilon'(1)+\beta y_\varepsilon'(1)=b, \tag{4}$$

where $0<\varepsilon<<1, a, b$ are known constant numbers, $p,q,r,f\in C^\infty[0,1], f(0)\neq 0, 0<p(0)$, $0<q(0), 0\langle r(0), n\rangle m, 1<k, (n,k,m\in N)$, and $y_\varepsilon(x)$ is sought function depending on a small parameter ε.

In problem (1), (3), we assume that $q(1)\neq 0, r(1)\neq 0$, and in problem (1), (4) require the condition $p(1)-\beta q(1)\neq 0$ and $r(1)\neq 0$.

It is required to find a sufficient condition under which ratios of the parameters n and m additional asymptotic layers arise and in this case to construct a uniform asymptotic approximation of the solution of two-point boundary value problems $(1),(2);(1),(3)$ and $(1),(4)$ on the interval $[0,1]$, when the small parameter $\mathrm{O}\mu$ tends to zero.

In what follows, the series used in the article are asymptotic expansions of the corresponding functions.

3. Features of boundary value problems

If in the perturbed second-order differential equation (1) it is formally assumed that $\varepsilon=0$, then the corresponding unperturbed differential equation is of the first order:

$$ly_0\equiv x^k p(x)y_0'(x)+x^k q(x)y_0(x)=f(x), \tag{5}$$

that is the order of the equation decreases; this is the first feature of the boundary value problems $(1),(2);(1),(3)$ and $(1),(4)$.

The second feature of boundary value problems (1), (2); (1), (3) and (1), (4) this differential equation (5) has a singular point at $x=0$. That is, the solution of equation (5) is not a smooth function on the segment $[0,1]$, (i.e. bisingularity $[5],[6]$).

The third feature of boundary value problems $(1),(2);(1),(3)$ and (1), (4): when the condition $m<\dfrac{n(k-1)}{k+1}$ is satisfied, two boundary layers appear in the vicinity of the point $x=0$.

Definition 1. Boundary value problems (1), (2); (1), (3) and (1), (4) with the above listed singularities will be called bisingularly perturbed problems with a biboundary layer.

Let's prove the theorem.

Theorem 1. If $m < \frac{n(k-1)}{k+1}$, then in problems $(1),(2);(1),(3)$ and (1), (4) in the vicinity of $x = 0$ there is a biboundary layer.

Proof. To prove the theorem, we show that in the boundary layer there are two characteristic limits, in addition to the outer one, which will include two inner expansions.

Let us construct an external solution $y_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x)$ of problems (1), (2); (1), (3); and (1), (4) which we will search for in the following form:

$$u_\varepsilon(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j u_j(x) \tag{6}$$

where $u_j(x)$ are as yet unknown functions.

Formally, substituting series (6) into equation (1), we obtain:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{n+j} u_j''(x) + x^k \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \left(p(x)u_j'(x) + q(x)u_j(x)\right) - r(x)\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{m+j} u_j(x) = f(x)$$

or by equating the coefficients at the same powers of a small parameter ε, we obtain the recursive relation:

$$lu_0 = f(x), x \in (0,1] \tag{7}$$

$$lu_j = r(x)u_{j-m}(x) - u_{j-n}''(x), j \in N, u_s(x) \equiv 0, s < 0. \tag{8}$$

Lemma 1. The equation (7) with the corresponding boundary condition

a) $u_0(1) = b, b) u_0'(1) = b,$ c) $u_0(1) + \beta u_0'(1) = b$

has a unique solution which can be represented as

$$u_0(x) = cE(x) + E(x)\int_1^x \frac{f(s)}{s^k p(s)} E^{-1}(s)ds, E(x) = e^{-\int_1^x \frac{q(s)}{p(s)}ds}, x \in (0,1],$$

where an arbitrary constant c takes on the corresponding value depending on the boundary condition:

$$\text{a) } c = b; b) c = \frac{f(1) - bp(1)}{q(1)}; c\Big) c = \frac{bp(1) - \beta f(1)}{p(1) - \beta q(1)}.$$

For $f(0) = f_0 \neq 0$ and $\text{C}\ldots \to 0$ we have: $u_0(x) \to \frac{1}{x^{k-1}}, 1 < k$.

Lemma 1 is proved by direct integration.

From is Lemma 1 implies that equations (8) with the corresponding boundary conditions:

a) $u_j(1) = 0, b) u_j'(1) = 0, c) u_j(1) + \beta u_j'(1) = 0, j \in N$

have unique solutions representable in the form

$$u_j(x) = 0, 1 \le j < m;$$
$$u_j(x) = c_j E(x) + E(x)\int_1^x \frac{r(s)u_{j-m}(s) - u''_{j-n}(s)}{s^k p(s)} E^{-1}(s)ds, m \le j \in N,$$

where an arbitrary constant c takes on the corresponding value depending on the boundary condition:

$$a)c_j = 0; b)c_j = \frac{r(1)u_{j-m}(1) - u''_{(}j-n)(1)}{q(1)}; c\Big)c_j = -\frac{\beta\left(r(1)u_{j-m}(1) - u''_{j-n}(1)\right)}{p(1) - \beta q(1)}.$$

For $m\left(1 + \frac{2}{k-1}\right) < n$ and $C\cdots \to 0$ we have:

$$u_1(x) \to \frac{1}{x^{2(k-1)}}, 1 < k.$$

Therefore, series (6) can be represented as:

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{x^{k-1}}\left(\tilde{u}_0(x) + \frac{\varepsilon^m}{x^{k-1}}\tilde{u}_1(x) + \ldots + \left(\frac{\varepsilon^m}{x^{k-1}}\right)^j \tilde{u}_j(x) + \ldots\right), \quad (9)$$

where $\tilde{u}_j \in C^\infty[0,1], j = 0,1,\ldots$ Series (9) is asymptotic with respect to a small parameter on the interval $x \in \left(\sqrt[k-1]{\varepsilon^m}, 1\right]$, and on the segment $x \in \left[0, \sqrt[k-1]{\varepsilon^m}\right]$ the asymptotic property is violated.

Let us carry out a detailed study in the vicinity of the singular point $x = 0$, to do this, in the vicinity of this point, we will stretch (transform) $C\cdots = \varepsilon^\alpha t, \alpha > 0$, then $dx = \varepsilon^\alpha dt, dx^2 = \varepsilon^{2\alpha}dt^2$, and equation (1) will be rewritten as:

$$\varepsilon^{n-2\alpha}\frac{d^2 y_\varepsilon(t)}{dt^2} + \varepsilon^{(k-1)\alpha}t^k p(\varepsilon^\alpha t)\frac{dy_\varepsilon(t)}{dt} + \varepsilon^{k\alpha}t^k q(\varepsilon^\alpha t)y_\varepsilon(t) -$$
$$-\varepsilon^m r(\varepsilon^\alpha t)y_\varepsilon(t) = f(\varepsilon^\alpha t), t \in \left[0, \varepsilon^{-\alpha}\right]$$

From the left side of the last equality, we select the main part, since $\varepsilon^{k\alpha} < \varepsilon^{(k-1)\alpha}$, therefore:

$$\varepsilon^{n-2\alpha}\frac{d^2 y_\varepsilon(t)}{dt^2} + \varepsilon^{(k-1)\alpha}t^k p(\varepsilon^\alpha t)\frac{dy_\varepsilon(t)}{dt} - \varepsilon^m r(\varepsilon^\alpha t)y_\varepsilon(t).$$

Equalizing the orders of behavior of the terms in the small parameter of any two terms, we have the corresponding characteristic limits, the following three cases are possible:

1) $n - 2\alpha = (k-1)\alpha \Rightarrow \alpha = n/(k+1)$,

2) $n - 2\alpha = m \Rightarrow \alpha = (n-m)/2$,

3) $(k-1)\alpha = m \Rightarrow \alpha = m/(k-1)$.

In the first case, if $\alpha = n/(k+1)$, then we get

$$\varepsilon^{\frac{n(k-1)}{k+1}}\frac{d^2y_\varepsilon(t)}{dt^2}+\varepsilon^{\frac{n(k-1)}{k+1}}t^k\frac{dy_\varepsilon(t)}{dt}-\varepsilon^m y_\varepsilon(t).$$

Let $\varepsilon^m y_\varepsilon(t)=\psi_\varepsilon(t)$, then we have:

$$\varepsilon^{\frac{n(k-1)}{k+1}-m}\left(\frac{d^2\psi_\varepsilon(t)}{dt^2}+t^k\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt}\right)-\psi_\varepsilon(t)$$

by the condition $\frac{n(k-1)}{k+1}-m>0$, therefore, at $\dot{o}\to 0$, there is no derivative in the main part $\psi_\varepsilon(t)$. Therefore, we will not consider the case $\alpha=n/(k+1)$.

In the second case, if $\alpha=(n-m)/2$ and $\varepsilon^m y_\varepsilon(t)=\psi_\varepsilon(t)$ then we get

$$\frac{d^2\psi_\varepsilon(t)}{dt^2}-\psi_\varepsilon(t)+\varepsilon^{\frac{(k-1)(n-m)}{2}-m}t^k\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt}$$

the main part contains a second-order derivative: $\frac{d^2\psi_\varepsilon(t)}{dt^2}-\psi_\varepsilon(t)$.

Therefore, this case $\alpha=(n-m)/2$ will be considered.

And the last case, if $\alpha=m/(k-1)$ and, then we get the expression:

$$\varepsilon^{n-m-\frac{2m}{k-1}}\frac{d^2\psi_\varepsilon(t)}{dt^2}+t^k\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt}-\psi_\varepsilon(t)$$

the main part contains a first-order derivative: $t^k\frac{d\psi_\varepsilon(t)}{dt}-\psi_\varepsilon(t)$. Therefore, this case $\alpha=m/(k-1)$ will be considered.

As a result, we obtained two characteristic limits in the boundary layer, i. e. second and third cases. It is easy to see that if $m=\frac{n(k-1)}{k+1}$, then all these three cases will be the same. Since $\frac{n-m}{2}>\frac{m}{k-1}$, therefore, the second case will describe the left boundary layer, and the third case will describe the intermediate boundary layer between the left boundary layer and the outer solution. Series (9) also suggests what the internal variable should be in the neighboring (intersecting) boundary layer, i.e. $x=\sqrt[k-1]{\varepsilon^m}t$. proof

4. Formal asymptotic approximation of the solution of boundary value problems $(1),(2);(1),(3);(1),(4)$ we will search in the form of the sum of three yet unknown functions:

$$y_\varepsilon(x)=v_\varepsilon(x)+w_\mu(t)+\pi_\lambda(\tau), \tag{10}$$

where $x=\mu^m t,\mu^{k-1}=\varepsilon;x=\lambda^{n-m}\tau,\varepsilon=\lambda^2$.

Formally, substituting expression (10) into equation (1), we obtain the following equations for unknown functions $v_\varepsilon(x), w_\mu(t), \pi_\lambda(\tau)$, respectively:

$$\varepsilon^n v_\varepsilon''(x) + x^k p(x) v_\varepsilon'(x) + \left(x^k q(x) - \varepsilon^m r(x)\right) v_\varepsilon(x) = f(x) - h_\varepsilon(x),\ x \in (0,1), \quad (11)$$

$$\begin{gathered}\mu^{(k-1)n-2m} w_\mu''(t) + \mu^{m(k-1)} t^k p\left(\mu^m t\right) w_\mu'(t) + \\ +\left(\mu^{mk} t^k q\left(\mu^m t\right) - \mu^{(k-1)m} r\left(\mu^m t\right)\right) w_\mu\left(\mu^m t\right) = h_\mu\left(\mu^m t\right),\ t \in \left(0, \mu^{-m}\right),\end{gathered} \quad (12)$$

$$\begin{gathered}\lambda^{2m} \pi_\lambda''(\tau) + \lambda^{(n-m)(k-1)} \tau^k p\left(\lambda^{n-m}\tau\right) \pi_\lambda'(\tau) + \\ +\left(\lambda^{k(n-m)} \tau^k q\left(\lambda^{n-m}\tau\right) - \lambda^{2m} r\left(\lambda^{n-m}\tau\right)\right) \pi_\lambda(\tau) = 0,\ \ \tau \in \left(0, \lambda^{m-n}\right).\end{gathered} \quad (13)$$

Boundary conditions (2)-(4) will take the form:

$$v_\varepsilon(0) + w_\mu(0) + \pi_\lambda(0) = a,\ \ v_\varepsilon(1) + w_\mu\left(\mu^{-m}\right) + \pi_\lambda\left(\lambda^{m-n}\right) = b,$$

$$v_\varepsilon'(0) + \mu^{-m} w_\mu'(0) + \lambda^{m-n} \pi_\lambda'(0) = a,\ \ v_\varepsilon'(1) + \mu^{-m} w_\mu'\left(\mu^{-m}\right) + \lambda^{m-n} \pi_\lambda'\left(\lambda^{m-n}\right) = b,$$

$$v_\varepsilon(0) + w_\mu(0) + \pi_\lambda(0) - \alpha\left(v_\varepsilon'(0) + \mu^{-m} w_\mu'(0) + \lambda^{m-n} \pi_\lambda'(0)\right) = a,$$

$$v_\varepsilon(1) + w_\mu\left(\mu^{-m}\right) + \pi_\lambda\left(\lambda^{m-n}\right) + \beta\left(v_\varepsilon'(1) + \mu^{-m} w_\mu'\left(\mu^{-m}\right) + \lambda^{m-n} \pi_\lambda'\left(\lambda^{m-n}\right)\right) = b.$$

Hence we have:
for condition (2):

$$v_\varepsilon(1) = b, \quad (14)$$

$$w_\mu\left(\mu^{-m}\right) = 0 \quad (15)$$

$$\pi_\lambda(0) = a - \left(v_\varepsilon(0) + w_\mu(0)\right),\ \ \pi_\lambda\left(\lambda^{m-n}\right) = 0, \quad (16)$$

for condition (3):

$$v_\varepsilon'(1) = b, \quad (17)$$

$$w_\mu'\left(\mu^{-m}\right) = 0 \quad (18)$$

$$\pi_\lambda'\left(\lambda^{m-n}\right) = 0,\ \ \pi_\lambda'(0) = \lambda^{m-n}\left(a - \left(v_\varepsilon'(0) + \mu^{-m} w_\mu'(0)\right)\right), \quad (19)$$

and for condition (4):

$$v_\varepsilon(1) + \beta v_\varepsilon'(1) = b, \quad (20)$$

$$\pi_\lambda\left(\lambda^{m-n}\right) + \beta \lambda^{m-n} \pi_\lambda'\left(\lambda^{m-n}\right) = 0, \quad (21)$$

$$\pi_\lambda(0) - \alpha \lambda^{m-n} \pi_\lambda'(0) = a + \alpha\left(v_\varepsilon'(0) + \mu^{-m} w_\mu'(0)\right) - \left(v_\varepsilon(0) + w_\mu(0)\right) \quad (22)$$

We study equation (11) with one of the boundary conditions $(14),(17),(20)$.

Let $v_\varepsilon(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{jm} v_j(x), h_\varepsilon(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{jm} h_j(x)$, then

$$\varepsilon^n \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{mj} v_j''(x) + x^k p(x) \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{mj} v_j'(x) + \left(x^k q(x) - \varepsilon^m r(x)\right) \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{mj} v_j(x) =$$

$$= f(x) - \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^{jm} h_j(x),\ x \in (0,1)$$

Here, equating the coefficients of the same powers of the small parameter $\in$, we obtain the following equations:

$$lv_0 = f(x) - h_0(x),\ x \in (0,1)$$
$$lv_j = r(x) v_{j-m}(x) - v_{j-n}''(x) - h_j(x),\ x \in (0,1),$$

solutions of these equations with the appropriate conditions exist and are unique by Lemma 1:

a) $v_0(1) = b,\ v_j(1) = 0$

b) $v_0'(1) = b,\ v_j'(1) = 0$

c) $v_0(1) + \beta v_0'(1) = b,\ v_j(1) + \beta v_j'(1) = 0.$

Here we choose unknown functions $h_j(x), j = 0,1,\ldots$ so that these solutions are smooth, i.e. $v_k \in C^\infty[0,1]$:

$$h_0(x) = f_{0,0} + f_{0,1}x + \ldots + f_{0,k-1}x^{k-1}, f_{0,s} = \frac{1}{s!} f^{(s)}(0)$$
$$h_j(x) = f_{j,0} + f_{j,1}x + \ldots + f_{j,k-1}x^{k-1}, f_{j,s} = \frac{1}{s!} \frac{d}{dx^s} F_j(0),$$
$$F_j(x) = r(x) v_{j-m}(x) - v_{j-n}''(x).$$

Let us turn to the study of differential equation (12) with one of the boundary conditions (15), (18),(21)

Let $w_\mu(t) = \frac{1}{\mu^{(k-1)m}} \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j w_j(t), h_\mu(\mu^m t) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^{(k-1)jm} h_j(\mu^m t)$,

then equation (12) will take the form:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \mu^j \left(t^k p(\mu^m t) w_j'(t) - r(\mu^m t) w_j(t)\right) +$$

$$+\mu^{(k-1)(n-m)-2m} \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j w_j''(t) + \mu^m t^k q(\mu^m t) \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j w_j(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^{(k-1)jm} h_j(\mu^m t), t \in (0, \mu^{-m}),$$

here, equating the coefficients of the same powers of the small parameter μ, we obtain the following equations:

$$t^k p(\mu^m t) w_j'(t) - r(\mu^m t) w_j(t) = H_j(\mu^m t, w_{j-1}, w_{j-2}, \ldots, w_0),\ t \in (0, \mu^{-m}),$$

Asymptotics of the solution of bisingular boundary value problems where functions $H_j(\mu^m t, w_{j-1}, w_{j-2}, \ldots, w_0)$ are linearly depends on the previous $w_{j-1}, w_{j-2}, \ldots, w_0$, and their derivatives, polynomially dependent on $\mu^m t$, in particular $H_0(\mu^m t, w_{j-1}, w_{j-2}, \ldots, w_0) = h_0(\mu^m t)$.

Solutions to these equations with appropriate boundary conditions:

a) $w_j\left(\mu^{-m}\right)=0, j=0,1,\ldots$

b) $w_j^{'}\left(\mu^{-m}\right)=0, j=0,1,\ldots$

c) $w_j^{'}\left(\mu^{-m}\right)=0, j=0,1,\ldots,m-1; w_j^{'}\left(\mu^{-m}\right)=-\frac{1}{\beta}w_{m-j}\left(\mu^{-m}\right), j=m,m+1,\ldots$

exist, are unique, and can be represented as:

$$w_0\left(t\right)=cE\left(t\right)+E\left(t\right)\int_{\mu^{-m}}^{t}\frac{H_j\left(\mu^m s,w_{j-1},w_{j-2},\ldots,w_0\right)}{s^k p\left(\mu^m s\right)}E^{-1}\left(s\right)ds, E\left(t\right)=e^{\int_{\mu^{-m}}^{t}\frac{r\left(\mu^m s\right)}{s^k p\left(\mu^m s\right)}ds},$$

$t\in\left[0,\mu^{-m}\right]$,

where the constant c is determined from the corresponding boundary conditions.

It is easy to see that $E\left(0\right)=0$. (22)

And now we turn to the study of equation (13) with one of the boundary conditions (16), (19),

Let $\pi_\lambda\left(\tau\right)=\frac{1}{\lambda^{2m}}\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j\pi_j\left(\tau\right)$, then equation (13) can be represented as:

$$\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j\left(\pi_j^{''}\left(\tau\right)-r\left(\lambda^{n-m}\tau\right)\pi_j\left(\tau\right)\right)+$$

$$+\lambda^{(n-m)(k-1)-2m}\tau^k\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j\left(p\left(\lambda^{n-m}\tau\right)\pi_j^{'}\left(\tau\right)+\lambda^{n-m}q\left(\lambda^{n-m}\tau\right)\pi_\lambda\left(\tau\right)\right)=0,\tau\in\left(0,\lambda^{m-n}\right),$$

or

$$\pi_j^{''}\left(\tau\right)-r_0\pi_j\left(\tau\right)=P_j\left(\lambda^{n-m}\tau,\pi_{j-1},\pi_{j-2},\ldots,\pi_0\right),\tau\in\left(0,\lambda^{m-n}\right),\ j=0,1,\ldots$$

Here the right-hand sides $P_j\left(\lambda^{n-m}\tau,\pi_{j-1},\pi_{j-2},\ldots,\pi_0\right)$ are linear in $\pi_s, s<j$ and their derivatives, polynomial in $\lambda^{n-m}\tau$.

Solutions of these equations with following boundary conditions have a unique solution [13], [14]:

a) $\pi_j\left(0\right)=\gamma,\ \lim_{\tau\to\infty}\pi_j\left(\tau\right)=0, \gamma=\text{const}$

b) $\pi_j^{'}\left(0\right)=\gamma,\ \lim_{\tau\to\infty}\pi_j^{'}\left(\tau\right)=0, \gamma=\text{const}.$

As a result, we have defined all three functions $v_\varepsilon\left(x\right), w_\mu\left(t\right), \pi_\lambda\left(\tau\right)$ as series in powers of small parameters $\in, \mu, \lambda$, respectively.

An estimate for the remainder term of this expansion can be obtained in exactly the same way as in [13]–[18].

We have proven.

Theorem 2. For solving two-point boundary value problems $(1),(2);(13);(1),(4)$ on the segment $x\in\left[0,1\right]$ at $m<\frac{n(k-1)}{k+1}$ and $\in\to 0$ the asymptotic expansion is valid:

$$y_\varepsilon(x)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^{jm}v_j(x)+\frac{1}{\mu^{(k-1)m}}\sum_{j=0}^{\infty}\mu^j w_j(t)+\frac{1}{\lambda^{2m}}\sum_{j=0}^{\infty}\lambda^j\pi_j(\tau),$$

with the corresponding functions defined above.

References

1. *V.I. Uskov.* Asymptotic Solution of the Cauchy Problem for a First-Order Differential Equation with a Small Parameter in a Banach Space // Math. Notes 110:1 (2021), 145–151.
2. *S.V. Zakharov*. Singular points and asymptotics in the singular Cauchy problem for the parabolic equation with a small parameter // Comput. Math. Math. Phys., 60:5 (2020), 821–832.
3. *E.M. Mukhamadiev, A.B. Nazimov, A.N. Naimov.* On solvability of class of nonlinear equations with small parameter in Banach space // Ufa Math. J., 12:3 (2020), 60–68.
4. *A.A. Bobodzhanov, V.F. Safonov.* A generalization of the regularization method to the singularly perturbed integro-differential equations with partial derivatives // Russian Math. (Iz. VUZ), 62:3 (2018), 6–17.
5. *T.K. Yuldashev and S.K. Zarifzoda.* New type super singular integro-differential equation and its conjugate equation // Lobachevskii J. Math. 41 (6), 1123–1130 (2020).
6. *T.K. Yuldashev, R.N. Odinaev, and S.K. Zarifzoda.* On exact solutions of a class of singular partial integrodifferential equations // Lobachevskii J. Math. 42 (3), 676–684 (2021).
7. *T.K. Yuldashev, S.K. Zarifzoda.* On a new class of singular integro-differential equations // Bull. Karaganda Univ., Math. 101, 138-в Т. 148 (2021).
8. *A.R. Danilin, O.O. Kovrizhnykh.* Asymptotics of the optimal time in a time-optimal control problem with a small parameter // Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.), 297, suppl. 1 (2017), 62в 5”-71.
9. *A.R. Danilin, O.O. Kovrizhnykh.* Asymptotics of the optimal time in a time-optimal control problem with a small parameter // Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, 21, no. 1, 2015, 71вТ.”-80.
10. *T.K. Yuldashev.* Mixed value problem for a nonlinear differential equation of fourth order with small parameter on the parabolic operator // Comput. Math. Math. Phys., 51:9 (2011), p. 1596-1604.
11. *A.M. Il'in.* Matching of Asymptotic Expansions of Solutions of Boundary Value Problems (Nauka, Moscow, 1989; AMS, 1992).
12. *A.M. Il'in and A.R. Danilin.* AsymptoticMethods in Analysis (Fizmatlit, Moscow, 2009) [in Russian].
13. *D.A. Tursunov.* The asymptotic solution of the bisingular Robin problem // Sib. Elektron. Mat. Izv. [Sib. Electron. Mat. Reports] 14, 10–21 (2017). [in Russian] DOI: 10.17377/semi.2017.14.002.
14. *K. Alymkulov and D.A. Tursunov.* A Method for Constructing Asymptotic Expansions of Bisingularly Perturbed Problems. Russian Mathematics 60 (12), 1-8 (2016). DOI: 10.3103/S1066369X1612001X.
15. *D.A. Tursunov.* Asymptotic Solution of Linear Bisingular Problems With Additional Boundary Layer // Russian Mathematics 62 (3), 60–67 (2018). DOI: .
16. *K.G. Kozhobekov, U.Z. Erkebaev and D.A. Tursunov.* Asymptotics of the Solution to the Boundaryvalue Problems when Limited Equation Has Singular Point // Lobachevskii J. Math. 41 (1), 96–101 (2020).URL:https://doi.org/10.1134/S1995080220010138.

17. *D.A. Tursunov.* The Asymptotic Solution of the Three-Band Bisingularly Problem // Lobachevskii Journal of Mathematics Vol. 38, No. 3, 542–546. (2017) DOI: 10.1134/S1995080217030258.
18. *D.A. Tursunov, G.A. Omaralieva.* Asymptotics of the solution to a two-band two-point boundary value problem // Vestn. Yuzhno-Ural. Gos. Un-ta. Ser. Matem. Mekh. Fiz., 13:2 (2021), 46в T"-52. DOI:10.14529/mmph210207.

АННОТАЦИИ ДОКЛАДОВ НЕПРЕДСТАВЛЕННЫХ АВТОРАМИ СТАТЕЙ

Ch. Ashyralyyev
(Turkey)

NUMERICAL SOLUTION OF NEUMANN-TYPE ELLIPTIC SIP WITH NON-LOCAL INTEGRAL AND MIXED BOUNDARY CONDITIONS

Abstract. The first order difference scheme for Neumann-type multi-dimensional ellipticsource identification problem with non-local integral and mixed boundary conditions are studied. Stability estimates for solution of difference scheme are obtained. Numerical results are Presented

С. Искандаров, А. Халилов
(Кыргызстан)

МЕТОД ФУНКЦИОНАЛОВ ЛЯПУНОВА И СТАБИЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ВОЛЬТЕРРОВА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Аннотация. Построением нового обобщенного функционала Ляпунова устанавливаются достаточные условия стабилизации решений, т. е. стремлении к конечным пределам всех решений и к нулю их первых производных, линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения второго порядка с запаздыванием аргумента на полуоси.

С. Искандаров, Г.Т. Халилова
(Кыргызстан)

ОБ ОЦЕНКЕ СНИЗУ РЕШЕНИЙ СЛАБО НЕЛИНЕЙНОГО ВОЛЬТЕРРОВА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

Аннотация: Развитием нестандартного метода сведения к системе, методом частичного срезывания и методом интегральных неравенств устанавливаются достаточные условия оценки снизу и стремления к бесконечности при неограниченном росте аргумента решений слабо нелинейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения второго порядка с запаздываниями на полуоси.

С. Искандаров, А.М. Байгесеков
(Кыргызстан)

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ВОЛЬТЕРРОВА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С НЕГЛАДКИМИ СРЕЗАННЫМИ ФУНКЦИЯМИ НА ПОЛУОСИ

Аннотация. Развитием нестандартного метода сведения к системе и метода срезывающих функций устанавливаются достаточные условия ограниченности на полуоси всех решений и их первых, вторых производных, т. е. устойчивости решений линейного вольтеррова интегро-дифференциального уравнения третьего порядка в случае, когда срезанные ядра и свободные члены могут быть недифференцируемыми на полуоси.

А. Байзаков, Г. Жээнбаева
(Кыргызстан)

О МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОБЛЕМЫ РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Аннотация. В данной работе исследована проблема разрешимость задачи Коши для нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных и найдено интегральное представление полученных решений. В силу нелинейности начальной задачи, найденные достаточные условия, вообще говоря, не гарантируют единственность полученных решений.

Г.С. Ободоева
(Кыргызстан)

ПОСТРОЕНИЕ РЕГУЛЯРИЗУЮЩЕГО ОПЕРАТОРА И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА ТРЕТЬЕГО РОДА

Аннотация. Исследованы вопросы единственности решения интегрального уравнения Вольтерра третьего рода. Построен регуляризирующий оператор для решения одного класса линейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода

Секция IV

Инновационные и компьютерные технологии обучения

Н. Аркабаев, Р.М. Алимжанов
(Кыргызстан)

МЕТОДИКА РАЗРАБОТКИ И ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КОМПЬЮТЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ НА УРОКАХ ФИЗИКИ

Аннотация. В данной статье рассматривается компьютерное моделирования некоторых процессов на уроках физики. Приводятся математическая модель, методика разработки математических моделей физических явлений и процессов, а также программная решения на языке программирования Python.

Ключевые слова: дифференциальная уравнения; моделирование; конденсатор; заряд; разряд; мультипликация.

Введение

При моделировании сложных систем используются различные виды моделей. Наиболее мощным средством исследования, анализа и синтеза систем является математическая модель.

Математическое моделирование представляет собой уравнение или систему уравнений, связывающих независимые и зависимые величины [2].

С моделями можно проводить три вида эксперимента:

1. Одноразовый эксперимент, задается конкретное значение, вычисляется соответственно значение функции.

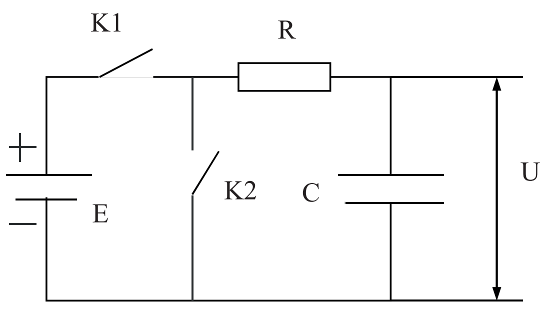
2. Многократное (автоматические) эксперименты в цикле, например от одного значения аргумента до другого с выбранным шагом.

3. Эксперимент со случайными значениями аргумента – имитационное моделирование (имитация – подражение).

1. Методика разработки математических моделей физических явлений и процессов

В качестве примера математического моделирования физических процессов возьмем процесс заряда и разряда конденсатора.

Из курса физики известно, что заряд конденсатора происходит по сложному экспоненциальному закону: $U = U_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$, однако данная зависимость не всегда понятна учащимся. Поэтому метод Эйлера применительно к данному процессу позволяет сделать эту зависимость более понятной для учащихся, так как математическая модель представляется цепочкой простых и известных законов [1].



Нами предложено отображать математическую компьютерную модель в виде неопределенного цикла с многократным повторением вычислений по одной и той же цепочке уравнений. В чем-то это напоминает алгоритм Эйлера для решения дифференциальных уравнений.

Рассмотрим последовательность разработки компьютерной модели процесса заряда конденсатора заданной емкости С от источника ЭДС E через резистор с известным сопротивлением R. Слева приведена алгоритмическая запись математической модели процесса заряда конденсатора.

Для того, чтобы модель заработала, вначале вводят исходные данные: $E, C, R, \varepsilon, \Delta t$, а также начальные значения величин: $t = 0, q = 0, U = 0$.

$$
\begin{aligned}
& I = \frac{E - U}{R} \\
& \Delta Q = I \Delta t \\
& Q = Q + \Delta Q \\
& U = \frac{Q}{C} \\
& T = T + \Delta t \\
& E - U > EPS
\end{aligned}
$$

Ток через резистор R зависит от разности напряжений $E - U$ и поэтому вначале через него течет большой ток, а по мере заряда напряжение на обкладках конденсатора повышается, ток заряда уменьшается и процесс заряда замедляется. Цикл может повторяться бесконечно, так как теоретически конденсатор зарядить точно до напряжения $U = E$ невозможно, поэтому процесс заряда считается законченным, когда эта разность станет меньше наперед заданной бесконечно малой величины ε.

Аналогично выглядит математическая модель разряда конденсатора через резистор с заданным сопротивлением R. При этом ток через резистор вначале большой, он определяется напряжением на обкладках конденсатора, а в конце разряда напряжение на конденсаторе приближается к нулю и процесс разряда замедляется и может продолжаться бесконечно. Так же, как и при заряде, процесс ограничивается моментом, когда напряжение на конденсаторе станет меньше наперед заданной величины ε.

Перед тем как начать работу с моделью, вводят исходные данные и начальные значения: $U, C, R, \varepsilon, \Delta t, t = 0, q = CU$. Далее, в первую очередь, вычисляется ток. Затем, считая, что в течение короткого промежутка времени Δt значение тока не изменилось, подсчитывается количество перенесенного с одной обкладки конденсатора на другую заряда. Это – потерянный конденсатором заряд, поэтому он вычитается из текущего заряда. Зная заряд и емкость конденсатора, можно вычислить напряжение на конденсаторе, которое уменьшилось. Параллельно идет подсчет времени разряда, который прекращается, как только напряжение на конденсаторе достигнет значения $U < \varepsilon$. В противном случае цикл вновь повторяется, то есть подсчитывается ток, затем потерянный заряд, новое значение заряда и напряжения и так далее.

$$I = \frac{E - U}{R}$$
$$\Delta Q = I \Delta t$$
$$Q = Q + \Delta Q$$
$$U = \frac{Q}{C}$$
$$T = T + \Delta t$$
$$E - U > EPS$$

Ниже приводится стержневой фрагмент математической модели разряда конденсатора на языке программирования Python:

```
u = u0
t = 0
q = c*u
if u > eps:
i = u/r
dq = i*dt
q = q-dq
u = q/c
t = t+dt
print (“Время разряда – “, t*1000,”mkc”)
```

Полная программа математической модели с одновременным построением графиков изменения напряжения на конденсаторе в процессе заряда и разряда рассмотрена в магистерской диссертации.

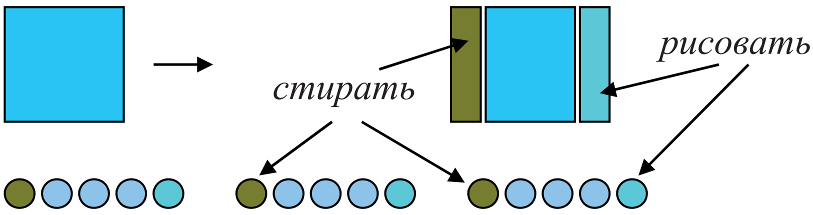
2. Методы анимации изображений

Существует несколько методов получения подвижных изображений – анимации изображений [4]:

1. Многоэкранный режим. Некоторые компьютеры, например, Агат, имеют несколько одинаковых графических экранов. Если на этих экранах создать последовательность кадров, из которых каждый последующий кадр незначительно отличается от предыдущего, и воспроизвести их один за другим, то получится эффект движения, как в мультипликационном фильме. Если компьютер имеет 12–16 таких экранов, то, записав в них последовательность кадров, можно продемонстрировать короткий мультипликационный фильм. Обычно последовательность кадров непрерывно повторяют, чтобы получить периодические движения, например, сжатие и расширение газа при движении поршня, периодические колебания маятника и др.

2. Фрагментарный режим. В большинстве современных компьютеров количество экранных режимов ограничено, причем экраны имеют разную разрешающую способность, то есть содержат разное число пикселов, и поэтому изображения на разных экранах не совместимы друг с другом. Для осуществления эффекта мультипликации каждый кадр из намеченной последовательности кадров рисуется на одном и том же экране, причем каждый кадр приходится рисовать заново. А это требует значительного времени и делает невозможным получение эффекта мультипликации.

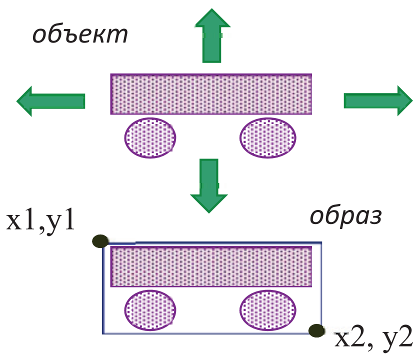
Если для записи (изменения) информации об одном пикселе требуется 1 мкс времени, то на запись одного полного кадра размером 640 × 480 пикселов потребуется 640*480 = 307200 мкс, то есть 0,3 с, что составит частоту всего 3 кадра в секунду, в то время как для мультипликации требуется частота не менее 16 кадров в секунду. Но если изменять содержимое не всего кадра, а только его отдельной части, например участка размером 100 × 100, на это потребуется 100*100 = 10000 мкс, то есть всего 0,01 с. Таким образом, чтобы сократить время рисования кадра, заново рисуют только часть (фрагмент) изображения, оставляя остальное без изменения. Например, чтобы показать работу тепловой машины, заново рисуется подвижный поршень, а неподвижный цилиндр сохраняется неизменным в каждом кадре.



3. Элементный режим. Для еще более существенного сокращения времени создания очередного кадра при рисовании движущегося объекта, его рисуют не целиком, а только его отдельные элементы. Например, поступательно движение квадрата можно показать, рисуя узкую полоску впереди и одновременно стирая такую же полоску сзади. При этом квадрат, кадр за кадром, перемещается в одном направлении. Ширину полоски обычно берут равной одному пикселю. Движение зарядов вдоль проводника можно изобразить движущейся пунктирной линией, причем движение каждой черточки достигается рисованием одной точки впереди и стиранием одной точки сзади. Кадр за кадром черточки двигаются в одном направлении.

4. Образный режим. Если при перемещении по экрану форма объекта остается неизменной, то объект запоминается и сохраняется в памяти как один объект памяти, то есть запоминается образ объекта. Этот объект перемещается по экрану как значок, и это достигается перемещением фрагментов памяти целиком на соответствующее число адресов.

Образ «запоминается» в виде прямоугольника, внутри которого целиком размещается перемещаемый объект. Эта область ограничена двумя вертикалями и двумя горизонталями, проходящими через начальную и конечную точки (x1, y1) и (x2, y2). За начало образа берется верхняя левая точка, а конечной является нижняя правая точка этого прямоугольника.



Принцип перемещения образа на экране заключается в стирании образа на старом месте и воспроизведении его на новом месте, при этом перемещение происходит практически мгновенно. Размещение образа в нужном месте экрана производится по заданным координатам начальной точки.

Стереть, означает нарисовать объект цветом фона, но иногда образ движется над изображением другого объекта и после прохождения нужно восстановить изображение объекта, над которым прошел образ. Это достигается использованием логической операции исключающее или позволяющее восстановить рисунок фона после прохождения образа [1, 2].

3. Методика создания электронных динамических контактов

Создание динамического плаката – целое искусство, эта работа интересна и увлекательна. Последовательность создания динамического компьютерного плаката представляет целый комплекс работ и требует от его создателя не только глубокого и тонкого знания соответствующего учебного материала, но и умений художника, чертежника, дизайнера и др. Мы выделили 10 основных этапов в этой работе:

1. Постановка задачи. Создание эскиза объекта демонстрации с учетом размеров и пропорций выбранного графического экрана.

2. Определение основных стадий (этапов) развития процесса и составление эскизов каждого кадра. Если число кадров невелико (до 5–10), выбирается дискретный режим демонстрации, иначе выбирается режим мультипликации.

3. Определение направления и границ перемещения графических объектов на экране. При этом нужно проследить, чтобы изображение не выходило за рамки экрана. Выбор масштаба пересчета размеров объекта в экранные пиксели.

4. Определение координат опорных точек объектов (в пикселях) с учетом перемещения отдельных частей в процессе демонстрации всех кадров. Нанесение значений координат на эскиз.

5. Написание графической программы на выбранном алгоритмическом языке (Python). При этом рекомендуется использовать подпрограммы.

6. Отлаживание программы, включение в программу заглушек, ловушек с целью обнаружения и локализации ошибок. Постепенное включение и отладка подпрограмм и процедур, пока после снятия заглушек и ловушек программа не заработает безотказно.

7. Размещение в кадрах надписей и символов с помощью текстового экрана с использованием позиционирования печати символов.

8. Установка механизма смены кадров (вручную – с помощью клавиш, или автоматически – через заданный интервал времени. Установка скорости перемещения объектов на экране.

9. Дополнение текста программы комментариями, чтобы сделать программу удобной для чтения, понимания и совершенствования пользователем, например, другим учителем.

10. Составление документации по применению программы – динамического плаката – на уроке с указанием особенностей и способов управления плакатом. Это необходимо, чтобы любой учитель физики мог заранее знать возможности и особенности данного дидактического пособия и встроить его в свой урок.

Выводы

При разработке компьютерных моделей необходимо соблюдение дизайна, создание удобства управления: путем включения, остановки, пауз, повторного воспроизведения кадров, изменения условий эксперимента. Сказанное можно проиллюстрировать на примере создания динамического плаката «Работа судоходного шлюза», как пример к теме «Сообщающееся сосуды», рассматриваемой по физике в 7-м классе средней школы [3].

Литература

1. *Громов С.В.* Физика: Оптика. Тепловые явления. Строение вещества: учеб. для 11-го кл. общеобразоват. учреждений / С.В. Громов; под ред. Н.В. Шароновой. 3-е изд. – М.: Просвещение, 2002. – 287 с.
2. *Гулд Х.* Компьютерное моделирование в физике / Х. Гулд, Я. Тобочник; пер. с англ. Т. I–II. – М.: Мир, 1990.
3. Лабораторный практикум по теории и методике обучения физике в школе: учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / С.Е. Каменецкий, С.В. Степанов, Е.Б. Петрова и др.; под ред. С.Е. Каменецкого и С.В. Степанова. – М.: Издательский центр «Академия», 2002. – 304 с.

Ж.К. Асанова, А. Керимбеков

(Кыргызстан)

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ТЕОРИИ

Аннотация. В статье исследованы вопросы разрешимости задачи нелинейной спектральной теории и разработана методика построения её решения. Результаты исследований изложены на примере решения нелинейных алгебраических уравнений. Найдены необходимые и достаточные условия существования решений в виде суммы двух функций.

Ключевые слова: нелинейный; уравнение; параметр; монотонная функция; система; величина; спектральная теория.

Нелинейное алгебраическое уравнение с параметром

Пусть дано скалярное нелинейное алгебраическое уравнение с параметром вида

$$A(x) = \lambda B(x) + f, \tag{1}$$

где x – неизвестная величина, λ – параметр, f – заданное число, $A(x)$ и $B(x)$ непрерывные и непрерывно дифференцируемые заданные нелинейные функции.

Постановка задачи 1. Пусть дано уравнение (1). Требуется найти те значения параметра λ, для которых уравнение (1) имеет нетривиальное решение.

Условия разрешимости задачи 1.

Решение уравнения (1) ищем в виде

$$x = x_0 + \lambda u, \tag{2}$$

где как параметр λ, так и величины x_0 и u считаются неизвестными, которые подлежат определению. Необходимое условие существования решения. Пусть величина $x-$ вида (2) является решением уравнения (1), т. е. имеет место равенство

$$A(x_0 + \lambda u) = \lambda B(x_0 + \lambda u) + f\ . \tag{3}$$

Предположим, число для функций $A(x)$ и $B(x)$ имеет место формула Лагранжа о конечных приращения, т. е. пусть

$$\begin{aligned} A(x_0+\lambda u) &= A(x_0)+A'(\overline{x})\lambda u \\ B(x_0+\lambda u) &= B(x_0)+B'(\tilde{x})\lambda u, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\overline{x}$ и $\tilde{x}=\tilde{x}(\lambda)$ точки, расположенные в интервале $(x_0, x_0+\lambda u)$.

Далее, согласно (4.1)–(4.2) равенство (3) приводим в следующему виду:

$$\left(A(x_0)-f\right)+\left(A'\left[\overline{x}(\lambda)\right]u-B(x_0)\right)\lambda-B'\left[\tilde{x}(\lambda)\right]u\cdot\lambda^2=0, \tag{5}$$

которое имеет место при, каждом значении параметра λ.

Отсюда в силу линейной независимости элементов системы $\{1,\lambda,\lambda^2\}$ получим систему равенств

$$A(x_0)=f\,, \tag{6}$$

$$A'\left[\overline{x}(\lambda)\right]u=B(x_0), \tag{7}$$

$$B'\left[\tilde{x}(\lambda)\right]u=0\,, \tag{8}$$

выполнение которых являются необходимым условием для разрешимости уравнения (1).

Теперь покажем, что соотношения (6)–(8) является и достаточным условием. Если предположить что они имеют место то, умножая первое на 1, второе – на λ, третье – на λ^2 и сложив их, с учетом (4.1)–(4.2), получим соотношение (3), которое означает, что функция вида (2) является решением уравнения (1).

Таким образом справедливо предложение: Функция (2) является решением уравнения (1) тогда и только тогда, когда x_0, u и параметр λ удовлетворяют условиям (6)–(8).

Алгоритм построения решения. Решение уравнения (1) находим согласно условиям (6) - (8), последовательно определяя неизвестных величин x_0, u и λ.

I. Определение неизвестной величины x_0.

Неизвестная x_0 определяется как решение уравнения (6). Будем различать два случая:

1.1. Пусть $A(x)$ - нелинейная монотонная функция. Тогда в силу условия

$$A'(x)\neq 0 \tag{9}$$

из уравнения (6) искомая величина x_0 определяется однозначно, т.е. существует функция $\varphi(\cdot)$ такая, что имеет место равенство

$$x_0=\varphi(f).$$

1.2. Пусть $A(x)-$ является нелинейной и немонотонной функцией.

В этом случае уравнение (6) может иметь несколько решений, т. е. существуют функции $\varphi_i(\cdot)$ такие, что имеют места следующие равенства

$$x_0=x_0^i=\varphi_i[f], i=1,2,3,\ldots,p\leq\infty. \tag{9}$$

Таким образом определяется неизвестная величина x_0. В дельнейших вычислениях величина x_0 считается известной.

II. Определение неизвестной величины u.

Для определения неизвестной величины u соотношение (7), умножая на λ, представим его в виде

$$A'\left[\overline{x}(\lambda)\right]\lambda u = \lambda B(x_0), \tag{10}$$

где x_0 – известная величина. Это соотношение, согласно формуле (4.1), перепишем в виде

$$\mathrm{A}(x_0 + \lambda u) = f + \lambda B(x_0). \tag{11}$$

Это уравнение в случае, когда $A(x)$ – является монотонной функцией, разрешается однозначно, т. е. имеет место соотношение

$$x_0 + \lambda u = \varphi\left(f + \lambda B(x_0)\right), \tag{12}$$

откуда находим, что

$$\lambda u = \varphi\left(f + \lambda B(x_0)\right) - x_0$$

в случае, когда $A(x)$ – не является монотонной функцией, уравнение (11) может иметь несколько решений вида

$$x_0 + \lambda u = \varphi_i\left(f + \lambda B(x_0)\right), i = 1, 2, 3, \ldots, p \le \infty.$$

Отсюда имеем множество значений для неизвестной величины u.

$$\lambda u = \varphi_i\left(f + \lambda B(x_0)\right) - x_0, i = 1, 2, 3, \ldots, p \le \infty.$$

Таким образом определяется неизвестная величина u, которая в общем случае является известной функцией от параметра λ, т.е. $u = u(\lambda)$.

III. Определение значение параметра λ.

Поскольку величины x_0 и u уже известны, то остается определить те значения параметра λ, для которых имеет место соотношение (8), где u является функцией от λ. Это соотношение при каждом фиксированном значении параметра λ, перепишем в виде

$$O = B'\left[\tilde{x}(\lambda)\right]u(\lambda) = \frac{1}{\lambda}B'\left[\tilde{x}(\lambda)\right]\lambda u(\lambda) = \frac{1}{\lambda}\left\{B\left(x_0 + \lambda u(\lambda)\right) - B(x_0) = 0\right\}.$$

Отсюда легко видеть, что искомое значения параметра λ можно найти из условия

$$B\left(x_0 + \lambda u(\lambda)\right) - B(x_0) = 0, \tag{13}$$

где x_0 – известная величина, $u(\lambda)$ – известная функция.

Соотношение (13) является алгебраическим уравнением относительно параметра λ. При исследовании его разрешимости будем различать случай, когда функция $B(\mathrm{x})$ – является монотонной и случай, когда она не является монотонной.

3.1. Если функция $B(\mathrm{x})$ – является монотонной, то из уравнения (13) имеем соотношение

$$x_0 + \lambda u(\lambda) = \mu\left(B(x_0)\right), \tag{14}$$

где μ – известная однозначно определяемая функция. Разрешая это уравнения относительно λ получим искомые значение параметра λ.

При этом возможные случаи:

3.1.1. Случай, когда величина u определена однозначно (например, $A(x)-$ является монотонной функцией)

3.1.2. Случай, когда величина u определена неоднозначно (например, $A(x)-$ не является монотонной функцией)

В обоих случаях решая уравнения (14) получим одно или несколько значений параметра λ.

Эти значения параметра λ и соответствующий им значения функции $u(\lambda)$, а также известное x_0 в (2) получим множество решений уравнения (1).

3.2. Если функция $B(x)$ – не является монотонной, то из уравнения (13) имеем несколько соотношений вида

$$x_0 + \lambda u(\lambda) = \mu_i\left(B(x_0)\right), i = 1,2,3,\ldots,q \leq \infty, \tag{15}$$

где μ_i – известные функции. Разрешая это уравнения относительно λ получим искомые значение параметра λ При этом из (15) как в случае, когда величина u определена однозначно (например, $A(x)-$ является монотонной функцией), так и в случае, когда величина u определена неоднозначно (например, $A(x)-$ не является монотонной функцией)

Решая уравнения (15) получим несколько значений параметра λ. В этом случае класс решений вида (2) уравнения (1) дополняется новыми элементами.

Литература

1. *Левитан Б.М.* Введение в спектральную теорию / Б.М. Левитан, И.С. Саргсян. – М.: Наука, 1970.
2. *Левитан Б.М.* Обратные задачи Штурма – Лиувилля / Б.М. Левитан. – М.: Наука, 1984.
3. *Лейбензон З.Л.* Обратная задача спектрального анализа для дифференциальных операторов высших порядков / З.Л. Лейбензон // ТММО 15. – 1966. – С. 70–144.
4. *Марченко В.А.* Спектральная теория операторов Штурма – Лиувилля / В.А. Марченко. – Киев: Наукова думка, 1972.
5. *Марченко В.А.* Операторы Штурма – Лиувилля и их приложения / В.А. Марченко. – Киев: Наукова думка,
6. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы / М.А. Наймарк. – М.: Наука, 1969.
7. *Наянов В.И.* Многополевые солитоны / В.И. Наянов. – М.: Наука, 2005.
8. *Поплавский Д.В.* Метод обратной спектральной задачи для системы Богоявленского на полуоси. Математика. Механика / Д.В. Поплавский // Сб. науч. тр. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, вып. 6. – 2004. – С. 115–117.
9. *Поплавский Д.В.* О разрешимости начально-краевой задачи для системы Богоявленского. Математика. Механика / Д.В. Поплавский // Сб. науч. тр. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, вып. 7. – 2005. – С. 97–100.
10. *Поплавский Д.В.* Метод обратной спектральной задачи для векторного модифицированного уравнения КдФ на полуоси. Математика. Механика / Д.В. Поплавский // Сб. науч. тр. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, вып. 8. – 2006. – 95–98.
11. *Поплавский Д.В.* О полноте специальных функций, определяемых по решениям Вейля дифференциального оператора высшего порядка на полуоси / Д.В. Поплавский // Современные проблемы теории функций и их приложения. – Саратов: Научная книга, 2006, 144–145. УДК 517.15, 519.245.

К.М. Торогельдиева, Ж. Нуруева
(Кыргызстан)

STEM-БИЛИМ БЕРҮҮДӨГҮ ТЕХНОЛОГИЯ – ОКУУ ПРЕДМЕТТЕРДИН ИНТЕГРАЦИЯСЫ

Аннотация. Бул макалада предмет аралык байланышты ачып корсотуу каралды.

Ключевые слова: STEM; GeoGebra; математика.

STEM билим берүүнүн өзгөчөлүгү – балдардын дүйнөгө карата илимий көз карашы комплекстүү калыптанат, дүйнөнү бүтүн кабыл алат, изилдөө көндүмү өөрчүйт. Окуу предметтердин жуурулушуусу, интеграциясы. Теория менен практиканын логикалык тыгыз байланышы, окуучулардын алган билимин дароо практикада колдонушу, өзүнүн продукциясын даярдашы. Бул окуу материалын терең өздөштүрүүгө жана окуу процессин жандуу, кызыктуу кылууга жардам берет. Ишмердик аркылуу креативдүү ой жүгүртүү, сынчыл ойломду ишке ашыруу. Окуучунун өзүнө болгон ишеними артат, жаңы, тааныш эмес материалдарды туура кабыл алуу компетенциясы калыптанат. Долбоордук ыкманы колдонуу аркылуу окуй алуу, окуп кетүү көндүмдөрүн, компетенциясын калыптандырып, командада жана өз алдынча иштей алууга үйрөтөт, баланы социалдаштырат. Окуучулар натыйжа үчүн иштешет, алардын логикалык ой жүгүртүүсү өсүп, тактыкка, маселени убагында чечүүгө машыгышат.

Изилдөө методу менен аткарылуучу тапшырмаларды иштөөдө окуучулар бир эле эмес бир нече предметтер боюнча алган билимдеринин комплексин пайдаланууга аргасыз болушат, демек билимдерди пайдалана билүүнүн практикалык ыкмаларына машыгышат. Натыйжада алардын билими өздөрүнүн ишенимине айланат, дүйнөгө илимий көз карашын калыптандырат [2.101-б.]

Компьютердик техниканын кеңири тарашы математиканы окутууда жаңы маселелерди коюуга алып келүү менен окутуу жана тарбиялоо процессин тездетет, мындан математиканын билим берүүчүлүк потенциалы жогорулайт [3.25-б.]

Математикалык билим берүүдө санариптештирүүнүн таасири чоң.

GeoGebra программасы ар кандай алгебралык жана геометриялык маселелерди моделдөөгө жана чыгарууга, функциялардын графиктерин сызууга, эң чоң жана эң кичине маанилерди, чектерди, туунду, интегралдарды табууга, тегиздик жана мейкиндик фигураларынын сүрөттөрүн алууга, кошумча конструкцияларды жүргүзүүгө, чиймелердин анимациясын түзүүгө мүмкүндүк берет.

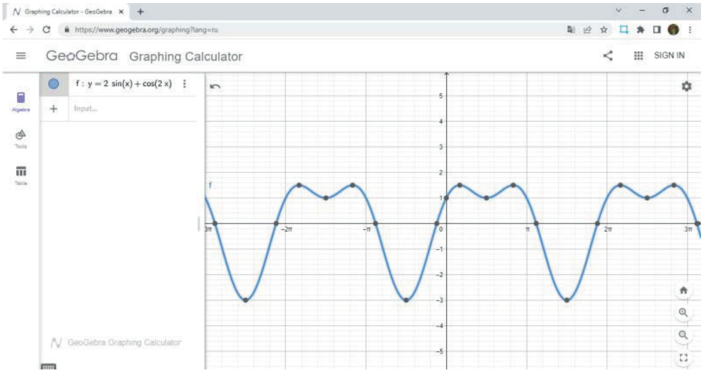
Мындан тышкары, бул программада мейкиндикте геометриялык чоңдуктардын ортосундагы байланыштарды түзүү, эксперименттерди жүргүзүү, формулаларды жана теоремаларды көрсөтүү, жана башка көптөгөн нерселерди аткарууга болот.

Мисал-1. f функциясынын берилген кесиндидеги эң чоң жана эң кичине маанисин тапкыла:

$$f(x) = 2sinx + cos2x, [0; 2\pi].$$

GeoGebra программасын салттуу жана аралыктан окутууда комплекстүү пайдалануу менен биз төмөндөгүлөргө жетишсек болот:

- турмуштук-практикалык мисалдарга көп көңүл буруу;
- математикалык моделдер менен эсептөө эксперименттерин кеңейтүү;
- абстракцияны визуалдаштарууну иш жүзүнө ашырууга, жаратылыштын эң кең кубулуштар классына математикалык таанууну таратуу;



1-сүрөт

- базалык жөндөмдүүлүктөрдү жана билгичтиктерди тарбиялоону ийгиликтүү иш жүзүнө ашыруу;
- математика илимине кызыгуусун арттыруу жана табигый илимдер менен байланышта өнүктүрүү.

Билим берүүдө жогорудагы көндүмдөр STEM багыты үчүн да фундамент болуп берет.

А.М. Осмонканов, Ж.А. Алымбаева, У.Р. Даниярова
(Кыргызстан)

ПРИМЕНЕНИЕ ЯЗЫКА C# ДЛЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА МЕТОДА ХУКА – ДЖИВСА

Аннотация. В статье рассматриваются основы задач безусловной оптимизации, а именно, основы метода Хука – Дживса. Реализовано программное приложение на базе языка программирования C# и приведены результаты выполнения программы.

Ключевые слова: безусловная оптимизация; исследующий поиск; поиск по образцу; целевая функция; направление минимизации; базовая точка; объектно-ориентированное проектирование.

Теория оптимизации применяется для решения большого спектра задач различного класса: от оптимизации показателей технико-экономических систем до теории принятия решений. Задачи оптимизации – это задачи нахождения максимального или минимального значения некоторой функции, называемой целевой функцией. Если заданы ограничения на аргументы данной функции, то задача называется задачей условной оптимизации, если ограничения не накладываются, то задачей безусловной оптимизации.

При решении задач безусловной оптимизации при отсутствии ограничений градиентные методы и методы, использующие вторые производные, сходятся быстрее, чем методы поиска. Тем не менее, применяя на практике методы, использующие производные, приходится сталкиваться с двумя главными препятствиями. Во-первых, в задачах с достаточно большим числом переменных довольно трудно или даже невозможно получить производные в виде аналитических функций, необходимых для градиентного алгоритма или алгоритма, использующего производные второго порядка. Вследствие изложенных трудностей на практике часто могут быть применены методы прямого поиска, где используется только значение целевой функции. Метод Хука – Дживса (метод прямого поиска) относится к группе численных методов безусловной оптимизации. Он применяется для решения задач минимизирования функции без учета ограничений. Метод Хука – Дживса – это комбинация исследующего поиска с циклическим изменением переменных и ускоряющего поиска по образцу.

Исследующий поиск ориентирован на выявление локального характера поведения целевой функции и определения направления минимизации. Для проведения исследующего поиска необходимо задать величину шага, которая может быть различной для разных координатных направлений и изменяться в процессе поиска. Поиск начинается в некоторой исходной точке. Если значение целевой функции в пробной точке не превышает значение функции в исходной точке, то шаг поиска рассматривается как успешный. В противном случае необходимо вернуться в предыдущую точку и сделать шаг в противоположном направлении с последующей проверкой значения целевой функции. После перебора всех N координат, т. е. после того, как выбрано приемлемое направление, исследующий поиск завершается. Полученную в результате точку называют «базовой точкой».

Поиск по образцу заключается в реализации единственного шага из полученной базовой точки x^k вдоль прямой, соединяющей эту точку с предыдущей базовой точкой x^{k-1}. Новая точка образца x^{k+1} определяется в соответствии с формулой

$$x_p^{k+1} = x^k + \left(x^k - x^{k-1}\right). \qquad (1)$$

Как только движение по образцу не приводит к уменьшению целевой функции, точка x^{k+1} фиксируется в качестве временной базовой точки и вновь проводится исследующий поиск. Если в результате получается точка с меньшим значением целевой функции, чем в точке x^k, то она рассматривается как новая базовая точка x^{k+1}.

С другой стороны, если исследующий поиск неудачен, то необходимо вернуться в точку x^k и провести исследующий поиск с целью выявления нового направления минимизации. В конечном счете возникает ситуация, когда такой поиск не приводит к успеху. В этом случае требуется уменьшить величину шага путем введения некоторого множителя и продолжить исследующий поиск. Поиск завершается, когда величина шага становится достаточно малой.

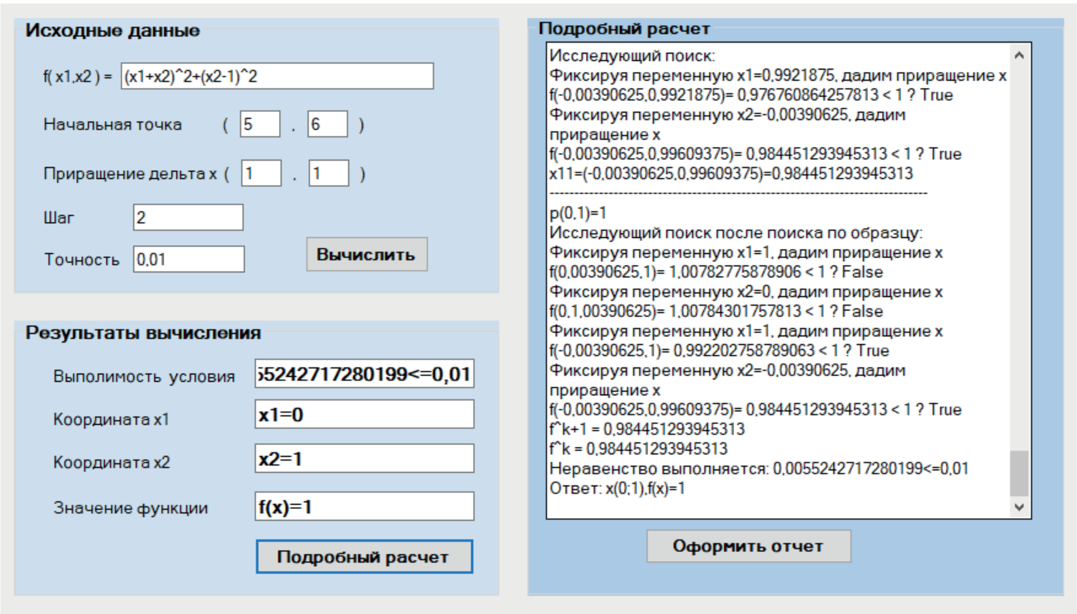


Рисунок 1 – Результат выполнения программы

Реализация программного приложения. Использование современных компьютерных информационных технологий позволяет автоматизировать решение многих оптимизационных задач (в том числе и многопараметрических). В нашем случае для реализации программного приложения в качестве среды разработки выбрана Visual Studio 2019 и язык C#, являющийся основным языком разработки программ на платформе NET корпорации Microsoft, основанный на современной объектно-ориентированной методологии проектирования. Язык C# предоставляет средства для кодирования практически любого типа программного обеспечения и для эффективной разработки программных приложений, предназначенных также и для научный вычислений (рисунок 1).

В качестве тестового примера рассматривается функция $f(x) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 - 1)^2$ с точностью *e = 0,01* и начальными значениями $x_1 = 5$ и $x_2 = 6$. Для чтения математических выражений применен анализатор математических выражений на базе библиотеки using info.lundin.math. При необходимости результаты расчетов можно оформить в виде текстового документа по нажатии кнопки «Оформить отчет».

Литература

1. *Данилин А.И.* Основы теории оптимизации (постановки задач): учебное пособие / А.И. Данилин. – Самара: Изд-во Самарского гос. аэрокосмического ун-та, 2011. – 57.
2. *Лесин В.В.* Основы методов оптимизации: учебное пособие для вузов / В.В. Лесин, Ю.П. Лисовец. 3-е изд., испр. – СПб.: Лань, 2011. – 352 с.: ил.
3. *Троелсен Э.* C# и платформа NET. Библиотека программиста / Э. Троелсен; пер. с англ. Р. Михеев. – СПб.: Питер, 2004. – 796 с: ил.
4. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование. – М.: Мир, 1975. – 534 с.
5. *Шилдт Г.* Полный справочник по C# / Г. Шилдт; пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2004. – 752 с.: ил.

Н. Темиргалиев
(Казахстан)

ПОЛНОЕ РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ «ЛИНЕЙНЫЙ КОНГРУЭНТНЫЙ МЕТОД»

Аннотация. Решена проблема построения случайных последовательностей с тестированием по методу Ковэю – Макферсона, продвижения по которой отслеживались в трех изданиях монографии «Искусство программирования» Дональда Кнута с продолжительностью в 50 лет. Полученные результаты имеют неограниченное количество применений в науке, в частности в физике, биологии, химии и в практических применениях, среди которых отметим создание компьютерных игр, методах искусственного интеллекта, формирование новых материалов.

Ключевые слова: генератор случайных чисел Лехмера; максимальный период; модуль; множитель; приращение; начальное значение линейной конгруэнтной последовательности; спектральный тест Ковэю и Макферсона.

Генератор случайних чисел Лехмера, или же Линейная конгруэнтная последовательность (см. [1–3]) максимального периода есть, по определению, рекуррентная последовательность X_n целых неотрицательных чисел

$$X_{n+1} = (aX_n + c) \bmod N, n \ge 0,$$

где N – модуль $0 < N$, а – множитель $0 \le a < N$, с – приращение $0 \le c < N$, X_0 – начальное значение $0 \le X_0 < N$, целые числа

$$a > 1, N > a, \tau(a,N) \ge 2 \text{ и } 1 \le \lambda(a,N) \equiv \frac{(a-1)^{\tau(a,N)}}{N} < (a-1)\ \tau^{\tau(a,N)-1})$$

связаны сравнениями $(a-1)^{\tau(a,N)} \equiv 0(\bmod N)$ и $(a-1)^{\tau(a,N)-1} \not\equiv 0(\bmod N)$.

Спектральный тест Ковэю – Макферсона состоит в следующем:
при заданных $s \ge 2$ и $\tau \ge 2$ и растущем N найти асимтотику величины (все параметры – целые положительные числа)

$$s\left\{v_s(a,N) : 2 \le a < N, (a-1)^{\tau} \equiv 0(\bmod N), (a-1)^{\tau-1} \not\equiv 0(\bmod N)\right\},$$

где

$$v_s(a,N) = i\left\{\sqrt{m_1^2 + \ldots + m_s^2} : m = (m_1, \ldots, m_s) \in Z^s, m \ne 0, \sum_{j=1}^{s} m_j a^{j-1} \equiv 0(\bmod N)\right\}.$$

Задача заключается в указании числа $a = a(N)$ с как можно большим значением величины $v_s(a,N)$, тогда как при всех a, N и s известны только неравенства $v_s(a,N) \le \gamma(s) N^{\frac{1}{s}}$. Это неравенство может быть сильно завышенным, поэтому задачи не решает.

Данный доклад посвящен полному решению поставленной задачи спектрального тестирования (ST) Ковэю – Макферсона, между параметрами s, τ и λ получены новые и окончательные результаты, носящие характер близких к точным в смысле явновыписанных констант равенств и неравенств (см. [4–5], а также [6–8]):

$$\mathrm{ST}v_2(a, N; (a-1)^2 = N) = (a-1)\sqrt{1 - 2\frac{a-2}{(a-1)^2}} = \sqrt{N}\sqrt{1 - 2\frac{\sqrt{N}-1}{N}},$$

$$\mathrm{ST}(2 \le s = \tau) : N^{\frac{1}{s}}\left(1 - (b_s - 1)N^{-\frac{1}{s}}\right) = a - b_s \le v_s(a, N; (a-1)^s = N)$$

$$\le \sqrt{a^2+1} = N^{\frac{1}{s}}\sqrt{1 + 2N^{-\frac{1}{s}} + 2N^{-\frac{2}{s}}}$$

$$\mathrm{ST}(2 \le s < \tau, \lambda \ge 1)$$

$$(N\lambda)^{\frac{1}{\tau}}\left(1 - (b_s - 1)(N\lambda)^{-\frac{1}{\tau}}\right) = (a - b_\tau) \le v_s\left(a, N; (a-1)^{\tau} = N\lambda, 1 \le \lambda \le (a-1)^{\tau-s}\right) \le$$

$$\le \sqrt{a^2+1} = (N\lambda)^{\frac{1}{\tau}}\sqrt{1 + 2(N\lambda)^{-\frac{1}{\tau}} + 2(N\lambda)^{-\frac{2}{\tau}}},$$

$$\mathrm{ST}(s > \tau \geq 2, \lambda \geq 1) : \nu_s\left(a, N; (a-1)^\tau = N\lambda, \lambda \geq 1\right) \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{\tau}\left(\binom{\tau}{k}\right)^2},$$

где $\left(-b_m\right)$ есть наибольший по модулю отрицательньй биномиальный коэффициент в разложении $(a-1)^m$ по степеням $a : b_2 = 2, b_3 = 3, b_4 = 4$,

$b_5 = 10, b_6 = 20, b_7 = 35, b_8 = 56, b_9 = 126, b_{10} = 252, b_{11} = 462, b_{12} = 792$,

$b_{13} = 1716, b_{14} = 3432, b_{15} = 6435, \ldots$ u m.d.

Из оценок снизу во всех ST-утверждениях, все они с точностью стремящегося к 1 при возрастании N явно выписываемого (что имеет решающее значение в практических применениях) множителя $\overline{\gamma_N}$ имеют вид $\overline{\gamma_N} \cdot N^{\frac{1}{s}} \leq \nu_S\left(a, N\right)$.

Возникает новая задача «В каждом конкретном случае применения Генератора случайных чисел (*)–(**) выяснить, каким большим должен быть $Nu\nu_s\left(a, N\right)$?». Разумеется, это отдельная задача, быть может, даже нетривиальная.

Полное решение проблемы «Линейный конгруэнтный метод»» имеет в продолжительную в полвека и поучительную в Компьютерных методах обучения историю.

В развернутом описании, доклад посвящен полному решению задачи в постановках, объектах и продолжительной респектабельной историей исследования с поучительными выводами, в совокупности находящихся, надеемся, в высших эшелонах Компьютерных наук. Генератор Лехмера (1949 г.) – один из самых популярных, если не самый популярный датчик и спектральный тест Ковэю и Макферсона 1965 года создания как«наиболее совеременный из имеющихся тестов», оба в связке с 50-летней историей, в развитии подробно изложенной во всех изданиях монографии «Искусство программирования» Дональда Эрвина Кнута с 1969 года по настоящее время, стало быть, бывшей в постоянной разработке, когда мало что проясняющая односторонняя оценка сверху главной числовой характеристики случайности ν_s с пессимистическим прогнозом «было бы очень трудно вычислить точность ν_s, когда $s \geq 10$» заменена на неожидаемую асимптотическую при всех $S \geq 2 -$ в чем в идеале состояла задача и в этом состоит её решение.

В заключение отметим, что все построения по этой теме в монографии Д. Кнута «Искусство программирования» носят полуэмпирический характер – выдвигаются теоретические положения на основе которых проводятся статистические эксперименты. К тому же, Д. Кнут на примере, казалось бы, несомненно, случайного подбора параметров в методе «середин квадратов» фон Неймана приходит к выводу, что чисто экспериментальные поиски ненадежны и всегда нужна какая-то теория.

Докладчиком проведено чисто теоретическое исследование.

Литература

1. *Кнут Д.Э.* Искусство программирования для ЭВМ. Т. 2. Получисленные алгоритмы; пер. с англ. Г.П. Бабенко, Э.Г. Белаги и Л.В. Майорова; под ред. К.И. Бабенко: The art of computer programming, Volume 2: Semi numerical Algorithms, Publisher: Addison-Wesley, 1969. – М.: Изд-во «Мир», 1977. – 784 с.
2. *Кнут Д.Э.* Искусство программирования. Т. 2. Получисленные алгоритмы; пер. с англ.; под общ. ред. Ю.В. Козаченко: The art of computer programming, Volume 2: Seminumerical Algorithms, Edition, Publisher: Addison-Wesley, 1998. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2001. – 832 с.

3. *Coveyou R.R., MacPherson R.D.* Fourier Analysis of Uniform Random Number Generators // Journal of the ACM (JACM). – 1967. –Vol. 14. – Issue 1. – Jan. – P. 100–119.
4. *Темиргалиев Н.* Элементарное построение линейной конгруэнтной последовательности Лехмера с той степенью случайности, с какой требованиям случайности отвечает спектральный тест Ковэю и Макферсона / Н. Темиргалиев, Ж.Н. Темиргалиева // Вестник Евразийского национального университета имени Л.Н. Гумилева. Серия Математика. Информатика. Механика. – 2018. – Т. 123. – № 2. – С. 8–55.
5. *Temirgaliyev*. Full spectral testing of linear congruent method with a maximum period // arXiv:1607.00950.
6. *Темиргалиев Н.* Применение теории дивизоров к численному интегрированию периодических функций многих переменных / Н. Темиргалиев // Матем. сб. – 1990. –Т. 181:4. – С. 490–505.
7. *Темиргалиев Н.* Об общем алгоритме численного интегрирования периодических функций многих переменных / Н. Темиргалиев, Е.А. Баилов, А.Ж. Жубанышева // Докл. РАН. – 2007. – Т. 416. – № 2. – С. 169–173.
8. *Баилов Е.А.* Об общем алгоритме численного интегрирования функций многих переменных / Е.А. Баилов, М.Б. Сихов, Н. Темиргалиев // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. – 2014. – 54:7. – С. 1059–1077.

АННОТАЦИЯ ДОКЛАДОВ НЕ ПРЕДСТАВЛЕННЫХ АВТОРАМИ СТАТЕЙ

А. Акматбекова
(Кыргызстан)

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ВИРТУАЛЬНЫХ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ ПО ФИЗИКЕ

Аннотация. В данной работе мы попытались проанализировать возможности применения виртуальных лабораторных работ по физике как одну из составляющих элементов самостоятельной подготовки студентов к выполнению реальных лабораторных работ. Разработана методика выполнения виртуальных лабораторных работ, описаны подготовка и проведение экспериментального обучения, а также приведён анализ его количественных и качественных результатов.

Ө.Ж. Жакыпова
(Кыргызстан)

КАДИМКИ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫК ТЕҢДЕМЕЛЕРДИН ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫН MAPLE СИСТЕМАСЫНДА ИЗИЛДӨӨДӨ

Аннотация. Lифференциалдык теңдемелердин жана теңдемелердин системаларынын чыгарылыштарын Maple системасында сапаттуу изилдөө каралган. Maple системасынын жардамында дифференциалдык теңдемелердин жана теңдемелердин системаларынын жалпы чыгарылыштарын тургузуу үчүн dsolve командасын колдонуунун эрежелери келтирилген. Maple системасында баштапкы жана чектик маселелердин аналитикалык, сандык жана графикалык чыгарылыштары тургузулган. Тургузулган чыгарылыштар изилденет.

Г. Мухаметжанова
(Кыргызстан)

THE USE OF INFORMATION TECHNOLOGY IN CONDUCTING VIRTUAL LABORATORY WORK IN PHYSICS

Abstract. In this paper, we tried to analyze the possibilities of using virtual laboratory work in physics as one of the constituent elements of independent preparation of students to perform real laboratory work. A methodology for performing virtual laboratory work is developed, the preparation and conduct of experimental training is described, and an analysis of its quantitative and qualitative results is given.

Keywords: physics; independent work; virtual laboratory work; information technology.

А. Шоманова
(Казахстан)

ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ С ПОЗИЦИЙ ПОСТРОЕНИЯ ЯВНЫХ ФОРМУЛ И ПЕРЕБОРА

Аннотация. Изучается вопрос о том, насколько явные квадратурные формулы предпочтительны перед алгоритмами перебора.

Под общей редакцией
д-ра физ.-мат. наук, профессора *А.К. Керимбекова*

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ
ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ,
ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ
И ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

Материалы IV Международной конференции,
приуроченной к 50-летию научно-педагогической деятельности
и 75-летнему юбилею доктора физико-математических наук,
профессора Акылбека Керимбекова
(г. Бишкек, 23–25 июня 2022 г.)

Редактор *Н.В. Шумкина*
Компьютерная верстка *М.Р. Фазлыевой*

Подписано в печать 14.03.2023.
Формат 60×84 $^{1}/_{8}$. Офсетная печать.
Объем 25,0 п. л. Тираж 100 экз. Заказ 67.

Издательство КРСУ
720000, г. Бишкек, ул. Киевская, 44.

Отпечатано в